TD3 : La théorie de Cauchy

Olivier de Gaay Fortman

14 - 18 février 2022

Les exercices marqués avec un † sont plus difficiles que les autres. Pour toute question ou remarque, veuillez envoyer un mail à olivier.de.gaay.fortman@ens.fr ou passer à mon bureau (T17, DMA, ENS).

Exercice 1

1. Soit $z_0 \in \mathbb{C}$ et $f(z) = c_0 + c_k(z - z_0)^k$ avec $c_0 \neq 0$, $c_k \neq 0$ (k entier ≥ 1). Soit $\rho > 0$ et $\mathbb{S} = \partial D(z_0, \rho)$ le cercle de centre z_0 et rayon ρ. Montrer qu'il existe un élément $z \in \mathbb{S}$ tel que $|f(z)| > |c_0|$.
2. Démontrer la proposition plus générale suivante. Soit $f(z) = c_0 + (z - z_0) + \cdots + c_n(z - z_0)^n + \cdots$ une série entière convergente dans un disque ouvert $D(z_0, r)$. Supposons que $|f(z)| \leq |f(z_0)| = |c_0|$ dans le disque $D(z_0, r)$. Alors $c_n = 0$ pour tout $n \geq 1$.
3. Soit U un ensemble ouvert connexe dans $\mathbb{C}$, et soit f une fonction complexe analytique dans U. Supposons que $z_0 \in U$ est tel que la fonction $z \mapsto |f(z)|$ atteint un maximum local en z_0 (c.a.d. il existe un $D(z_0, r) \subset U$ tel que $|f(z)| \leq |f(z_0)|$ dans $D(z_0, r)$). Montrer que f est constante.

Exercice 2

1. Soit $R \in \mathbb{R}_{>0}$ et soit f une fonction analytique dans $D(0, R)$. Pour tout r tel que $0 < r < R$, soit $M(r)$ la borne supérieure de $|f(z)|$ pour z dans $\partial D(0, r) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = r\}$. Montrer que si f n'est pas constante, $M(r)$ est une fonction strictement croissante de r.
2. Supposons qu'il existe r avec $0 < r < R$ tel que la fonction $\theta \mapsto \left|f(re^{i\theta})\right|$ soit constante et tel que $f(z) \neq 0$ pour $|z| < r$. Montrer que f est constante.
3. En déduire que si pour une valeur de r ($0 < r < R$), la fonction $\theta \mapsto f(z)$ prend ses valeurs réelles sur $\partial D(0, r) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = r\}$, alors f est constante.

Exercice 3

Soit f une fonction définie et bornée dans le disque fermée $\overline{D}(0, 1)$, analytique dans le disque ouvert $D(0, 1)$, et continue dans $\overline{D}(0, 1)$.

1. Montrer que l'on a $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(e^{i\theta})d\theta = f(0)$.
2. En déduire que $|f(0)| \leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left|f(e^{i\theta})\right| d\theta$.
3. Montrer que si f est analytique dans un ouvert contenant le disque $\overline{D}(0, 1)$, l'égalité dans 2 ne peut avoir lieu que si f est constante dans le disque $\overline{D}(0, 1)$.

Exercice 4

Pour un chemin $\gamma\colon [a, b] \to \mathbb{C}$, soit $\gamma^0\colon [a, b] \to \mathbb{C}$ le chemin opposé $\gamma^0(t) = \gamma(a + b - t)$. Pour deux chemins $\gamma_1\colon [a, b] \to \mathbb{C}, \gamma_2\colon [c, d] \to \mathbb{C}$ avec $\gamma_1(b) = \gamma_2(c)$, soit $\gamma = \gamma_1 \wedge \gamma_2$ la juxtaposition de γ_1 et γ_2 :

$$\gamma\colon [a, d + b - c] \to \mathbb{C}, \quad \gamma(t) = \begin{cases} \gamma_1(t), & \text{si} \quad a \leq t \leq b, \\ \gamma_2(t), & \text{si} \quad b \leq t \leq d + b - c. \end{cases}$$

Si γ est un chemin dans un ouvert $U \subset \mathbb{C}$, montrer que le lacet $\gamma \wedge \gamma^0$ est homotope à un point dans U.

Exercice 5

1. Soit $f(z) = \sum_n a_n z^n$ une série entière. Supposons que $a_n \in \mathbb{R}$ pour tout n, et que $f(z)$ soit convergente sur $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ tout entier. Montrer que $f(z)$ est convergente sur $\mathbb{C}$ tout entier.
2. Considérons la fonction $f\colon \mathbb{C} - \{i, -i\} \to \mathbb{C}$,
$$f(z) = \frac{1}{1+z^2}.$$
Soit $a \in \mathbb{R}$. Considérons le développement de Taylor de $f(x)$ dans un intervalle ouvert atour de a. Montrer que cette série n'est pas convergente sur $\mathbb{R}$ tout entier.

Exercice 6

Considérons les fonctions analytiques $f_i\colon \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}$ $(i = 1, 2, 3)$ définies comme suit :
$$f_1(z) = \frac{1-\cos z}{z^2}, \quad f_2(z) = \frac{\sin z}{z}, \quad f_3(z) = \frac{e^z - 1}{z}.$$
Pour chaque $i \in \{1, 2, 3\}$, montrer qu'il existe une fonction analytique $g_i\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ telle que $g_i|_{\mathbb{C}^*} = f_i$.

Exercice 7

1. En appliquant la formule de Cauchy à la fonction $z \mapsto \frac{e^{iz}-1-iz}{z^3}$ sur le bord d'un demi-anneau $\{z \in \mathbb{C} \mid \epsilon \leq |z| \leq R, \Im(z) \geq 0\}$ contenu dans le demi-plan $\{z \in \mathbb{C} : \Im z > 0\}$, calculer la valeur de $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t - t}{t^3} \mathrm{d}t$.
2. En intégrant $z \mapsto e^{-z^2}$ sur le bord d'un secteur angulaire d'angle délimité par les segments $[0, R]$ et $\left[0, Re^{i\frac{\pi}{4}}\right]$ calculer la valeur des intégrales $\int_0^{+\infty} \sin\left(x^2\right) \mathrm{d}x$ et $\int_0^{+\infty} \cos\left(x^2\right) \mathrm{d}x$.
3. Soit a un nombre réel. En appliquant la formule de Cauchy sur le rectangle de sommets $\pm R$ et$\pm R + i\frac{a}{2}$, calculer la valeur de l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-x^2} \cos(ax) \, \mathrm{d}x$.
4. En appliquant la formule de Cauchy à $z \mapsto \frac{\log z}{1-z}$ sur le bord de $\{z \in \mathbb{C} : |z-1| \leq 1 \text{ et } |z| \geq \epsilon\}$, calculer la valeur de l'intégrale $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log(\sin\theta) \, \mathrm{d}\theta$.

†Exercice 8

Pour $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction continue, on écrit (formellement) $\hat{f}(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{ixy} dx$, et on appelle $\hat{f}$ la *transformée de Fourier* de f. Nous la désignons aussi par $\mathcal{F}(f)$.

1. Supposons que $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ soit de support compact. Étendre $\hat{f}$ à une fonction définie sur $\mathbb{C}$. Montrer que, pour $z = x + iy \in \mathbb{C}$, on obtient $\hat{f}(z) = \hat{f}(x+iy) = \mathcal{F}(e^{-xy} f(x))(x)$.
2. Supposons que $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ soit de support compact. Montrer que $\hat{f}$ est entière, c.a.d. analytique sur $\mathbb{C}$ tout entier.
3. Soit $A \in \mathbb{R}_{>0}$ et soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction continue à support dans $[-A, A]$. Supposons que $\int_{-A}^{A} |f(x)|^2 \, dx < \infty$. Montrer que $\hat{f}(z)$ est une fonction entière *du type exponentiel* A, c.a.d. il existe une constante C tel que $\left|\hat{f}(z)\right| \leq C \cdot e^{A|\Im(z)|}$ pour tout $z \in \mathbb{C}$. Montrer aussi que $\int_{-\infty}^{\infty} \left|\hat{f}(x)\right|^2 dx < \infty$.
4. Supposons que $F(z)$ soit une fonction entière du type exponentiel A, et que $\int_{-\infty}^{\infty} |F(x)|^2 \, dx < \infty$. Montrer que $F = \hat{f}$ pour une fonction $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ comme dans 3.
5. Soit f une fonction $\mathcal{C}^\infty$ à support dans $[-A, A]$. Montrer que $\hat{f}(z)$ est une fonction entière du type exponentiel A, et que $\hat{f}(x)$ est *rapidement décroissante* sur $\mathbb{R}$, c.a.d. pour tout $N \in \mathbb{N}$, il existe une constante C_N tel que $\left|\hat{f}(x)\right| \leq C_N \cdot (1+|x|)^{-N}$ pour $x \in \mathbb{R}$.
6. Soit $F(z)$ une fonction entière du type exponentiel A tel que $F(x)$ soit rapidement décroissante sur $\mathbb{R}$. Montrer que $F = \hat{f}$ pour une fonction $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ comme dans 5.