TD4 : Fonctions holomorphes

Olivier de Gaay Fortman

21 - 25 février 2022

Exercice 1

Soit U un ouvert de $\mathbb{C}$ et $f\colon U \to \mathbb{C}$, $g\colon f(U) \to \mathbb{C}$ deux applications de classe $\mathcal{C}^1$ au sens réel.

1. Calculer $\frac{\partial}{\partial z}(g \circ f)$ et $\frac{\partial}{\partial \bar{z}}(g \circ f)$.
2. En déduire que $\frac{\partial \bar{f}}{\partial z} = \overline{(\frac{\partial f}{\partial \bar{z}})}$ et que $\frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{z}} = \overline{(\frac{\partial f}{\partial z})}$.

Exercice 2

Soient U un ouvert connexe de $\mathbb{C}$ et $f\colon U \to \mathbb{C}$ une fonction holomorphe. En utilisant les conditions de Cauchy-Riemann, montrer que f est constante si elle vérifie l'une des conditions suivantes :

1. $f(z) = f(\bar{z})$, 2. $\Re(f)$ est constante, 3. $\Im(f)$ est constante, 4. $|f|$ est constante.

– –

Rappelons les définitions suivantes. Soient $x_1, \ldots, x_n$ les coordinées linéaires sur $\mathbb{R}^n$. Définissons Ω^* comme l'algèbre sur $\mathbb{R}$ engendré par $dx_1, \ldots, dx_n$ avec les rélations $(dx_i)^2 = 0$ et $dx_i dx_j = -dx_j dx_i, i \neq j$. Soit $V \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert non-vide, et $\mathcal{C}^\infty(V)$ l'algèbre de $\mathcal{C}^\infty$ fonctions $f\colon V \to \mathbb{R}$. Les *formes différentielles* $\mathcal{C}^\infty$ *sur* V sont les éléments de l'algèbre $\Omega^*(V) = \mathcal{C}^\infty(V) \otimes_{\mathbb{R}} \Omega^*$. L'algèbre $\Omega^*(V)$ est naturellement gradué ; un élément $\omega \in \Omega^q(V)$ s'appelle un *q-forme différentielle $\mathcal{C}^\infty$ sur* V, et s'écrit uniquement comme $\sum f_{i_1,\ldots,i_q} dx_{i_1} \cdots d_{x_q}$ avec $i_1 < \ldots < i_q$. L'operateur $d\colon \Omega^q(V) \to \Omega^{q+1}(V)$ est défini par $df = \sum(\partial f/\partial x_i)dx_i$ pour $f \in \Omega^0(V)$, et par $d\omega = \sum df_I dx_I$ pour $\omega = \sum_I f_I dx_I$. Les formes dans le noyeau de $d\colon \Omega^q(V) \to \Omega^{q+1}(V)$ s'appellent *fermées*, et les formes dans l'image de $d\colon \Omega^{q-1}(V) \to \Omega^q(V)$ *exactes.*

– –

Exercice 3

1. En utilisant la formule $d(\tau \cdot \omega) = (d\tau) \cdot \omega + (-1)^q \tau \cdot d\omega$ pour $\tau \in \Omega^q(V)$, $\omega \in \Omega^r(V)$, montrer que les formes différentielles exactes sont fermées.
2. Pour $z = x + iy \in \mathbb{C}^*$, on définit $\mathrm{d}r = \mathrm{d}r\,(z) = \frac{x\mathrm{d}x + y\mathrm{d}y}{\sqrt{x^2+y^2}}$ et $\mathrm{d}\theta = \mathrm{d}\theta\,(z) = \frac{-y\mathrm{d}x + x\mathrm{d}y}{x^2+y^2}$. On obtient ainsi deux formes différentielles sur $\mathbb{C}^*$. Ces formes sont-elles fermées ? Exactes ?
3. Montrer qu'en tout $z \in \mathbb{C}^*$ les applications $\mathrm{d}r\,(z)$ et $\mathrm{d}\theta\,(z)$ forment une $\mathbb{C}$-base de l'espace des applications $\mathbb{R}$-linéaires de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$. Si f est une fonction $\mathcal{C}^1$ sur un ouvert U de $\mathbb{C}^*$ sa différentielle peut donc s'écrire $\mathrm{d}f = \frac{\partial f}{\partial r}\mathrm{d}r + \frac{\partial f}{\partial \theta}\mathrm{d}\theta$.
4. Exprimer $\frac{\partial f}{\partial z}$ et $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}$ en fonction de $\frac{\partial f}{\partial r}$ et de $\frac{\partial f}{\partial \theta}$.
5. Que deviennent les équations de Cauchy–Riemann en coordonnées polaires ?
6. Montrer qu'une fonction holomorphe $f\colon U \to \mathbb{C}$ est constante si $\mathrm{Arg}(f)$ est constante.

Exercice 4

Soit f une fonction holomorphe sur le disque unité. On suppose qu'il existe $r \in \,]0,1[$ tel que f est bornée par M sur $\partial\mathbb{D}\,(0,r)$ et qu'il existe $a \in \mathbb{D}\,(0,r)$ tel que $f\,(a) = 0$. Montrer que $|a| \geq \frac{|f(0)|}{M+|f(0)|} r$.

Exercice 5

Soit f une fonction holomorphe sur $U \coloneqq \mathbb{C} - \mathbb{R}_{\leq 0} \subset \mathbb{C}$.

1. En utilisant l'Exercice 3.5, montrer l'existence d'une primitive F de $z \mapsto 1/z$ sur U avec $F(1) = 0$.
2. Expliquer pourqoui, plus généralement, chaque fonction holomorphe $f\colon U \to \mathbb{C}$ admet une telle primitive.

Exercice 6

Soient U un ouvert connexe de $\mathbb{C}$ et f une fonction holomorphe sur U.

1. Que peut-on dire de f si $\bar{f}$ est holomorphe ?
2. On suppose qu'il existe une fonction $F \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telle que pour tout $z \in U$ on a $\Im(f(z)) = F(\Re(f(z)))$. Que peut-on dire de f ?
3. Conclure que l'image d'une fonction holomorphe $f\colon U \to \mathbb{C}$ non-constante ne peut pas être contenu dans l'image d'une $\mathcal{C}^1$ courbe $\gamma\colon [0,1] \to \mathbb{C}$. Donner une autre preuve de ce fait.

Exercice 7

Soit U un ouvert connexe de $\mathbb{C}$. Soient f et g des fonctions holomorphes sur $\mathbb{C}$.

1. On suppose que $f(z) + \overline{g(z)}$ est réel pour tout $z \in U$. Montrer qu'il existe un réel c tel que $f = g + c$.
2. On suppose que g ne s'annule pas et que $f(z)\,\overline{g(z)}$ est réel pour tout $z \in U$. Montrer qu'il existe un réel c tel que $f = cg$.

†Exercice 8

Soit U un ouvert de $\mathbb{C}$. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions holomorphes sur U convergant simplement vers une fonction f sur U. Montrer qu'il existe un ouvert dense $V \subset U$ tel que f est holomorphe sur V.

†Exercice 9

1. Que peut-on dire des fonctions entières à valeurs dans un demi-plan ?
2. Soient f et g des fonctions entières telles que pour tout $z \in \mathbb{C}$ on a $|f(z)| \leq |g(z)|$. Que peut-on dire de f et g ?
3. Établir une version du théorème de Liouville pour les fonctions entières à croissance au plus polynômiale.
4. Montrer que les fonctions entières f telles que $|f(z)|$ tend vers $+\infty$ lorsque $|z|$ tend vers $+\infty$ sont polynômiales.

†Exercice 10

Soit α une 1-forme $\mathcal{C}^\infty$ fermée sur $D(0,1)$. Montrer qu'il existe une fonction $f\colon D(0,1) \to \mathbb{C}$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ avec $\alpha = df$. Autrement dit (*Lemme de Poincaré*) : les 1-formes $\mathcal{C}^\infty$ fermées sur $D(0,1)$ sont *exactes*.

†Exercice 11

Soit $f\colon V \to W$ une application $\mathbb{R}$-différentiable entre deux ouverts V et W de $\mathbb{R}^2$. On dit que f *conserve les angles de manière infinitésimale* si, étant donné deux courbes régulières $\gamma_1\colon [0,1] \to V$ et $\gamma_2\colon [0,1] \to V$ de classe $\mathcal{C}^1$ telles que $\gamma_1(0) = \gamma_2(0)$, les courbes images $\Gamma_1 = f \circ \gamma_1$ et $\Gamma_2 = f \circ \gamma_2$ forment entre elles au point $f(0)$ un angle orienté $(\Gamma_1'(0), \Gamma_2'(0))$ égal à l'angle orienté $(\gamma_1'(0), \gamma_2'(0))$. On dit aussi que f est une *application conforme*. Montrer que si on identifie $\mathbb{R}^2$ avec $\mathbb{C}$, alors f est une application conforme si et seulement si f est holomorphe et sa dérivée ne s'annule pas.