TD 5 : Fonctions holomorphes et harmoniques

Olivier de Gaay Fortman

7 - 11 mars 2022

Les exercices marqués avec un † sont plus difficiles que les autres. Pour toute question ou remarque, veuillez envoyer un mail à olivier.de.gaay.fortman@ens.fr ou passer à mon bureau (T17, DMA, ENS).

Fonctions holomorphes

Exercice 1

1. Soit $\alpha \in D(0,1)$. Définissons une fonction $g_\alpha \colon \overline{D}(0,1) \to \mathbb{C}$ par
$$g_\alpha(z) = \frac{z-\alpha}{1-\bar{\alpha}z}.$$
Expliquer pourquoi g_α est holomorphe sur $D(0,1)$.
2. Montrer que, pour $z \in \partial D(0,1) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$, on a $g_\alpha(z) \in \partial D(0,1)$.
3. En déduire que $g_\alpha(z) \in D(0,1)$ pour $z \in D(0,1)$.
4. Soit $z \in D(0,1)$ et $w = g_\alpha(z) \in D(0,1)$. Trouver $\beta \in D(0,1)$ tel que $z = g_\beta(w)$. Conclure que g_α et g_β sont des fonctions réciproquement inverses. En particulier, $g_\alpha \colon D(0,1) \to D(0,1)$ est un *automorphisme analytique du disque ouvert d'unité.*
5. Observer que $g_\alpha(\alpha) = 0$. Soit $f \colon D(0,1) \to D(0,1)$ un autre automorphisme analytique tel que $f(\alpha) = 0$. Montrer que f diffère de g_α par une rotation : il existe $\varphi \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ tel que $f(z) = e^{i\varphi} \cdot g_\alpha(z)$.
6. Conclure que si f est un automorphisme de $D(0,1)$ tel que $f(0) = 0$, alors f est une rotation.

†Exercice 2

Le but de cet exercice est de démontrer le théorème d'Ostrowski–Hadamard.

Théorème (Ostrowski–Hadamard)**.** *Soit $\lambda > 1$. Soit $(p_n)_{n\geq 0}$ une suite d'entiers telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on ait $p_{n+1} > \lambda p_n$. Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres complexes telle que la série entière $\sum_{n\geq 0} a_n z^{p_n}$ est de rayon de convergence 1. On note $f(z)$ pour $z \in D(0,1)$ sa somme. Alors il n'existe pas d'ouvert connexe U contenant le disque unité ouvert tel que $f \colon D(0,1) \to \mathbb{C}$ s'étend à U en une fonction holomorphe.*

1. On suppose qu'il existe un tel U. Essayons d'arriver à une contradiction. Montrer qu'on peut se ramener au cas où $1 \in U$.
2. On choisit un entier naturel non-nul k et on pose $\psi_k \colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}, z \mapsto \frac{1}{2}\left(z^k + z^{k+1}\right)$. Montrer que si $\epsilon > 0$ est suffisamment petit alors la fonction $f \circ \psi_k$ est bien définie et holomorphe sur le disque ouvert de centre 0 et de rayon $1+\epsilon$.
3. Choisir $k \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ tel que $\frac{k+1}{k} < \lambda$. En explicitant le développement en série entière en 0 de $f \circ \psi_k$, montrer que le rayon de convergence de f est supérieur ou égal à $(1+\epsilon)^k$ et conclure.

†Exercice 3

En 1964, Erdös prouve que l'hypothèse du continu est équivalente à l'énoncé suivant.

Énoncé (E)**.** *Il existe un ensemble indénombrable* $\mathcal{F}$ *de fonctions entières tel que pour tout* $z \in \mathbb{C}$ *l'ensemble* $\{f(z) : f \in \mathcal{F}\}$ *est dénombrable.*

Le but de l'exercice est de démontrer ce résultat. On rappelle l'énoncé de l'hypothèse du continu.

Énoncé (Hypothèse du continu)**.** $2^{\aleph_0} = \aleph_1$ *ou, de manière équivalente, il existe un bon ordre* $<$ *sur* $\mathbb{R}$ *tel que pour tout* x *dans* $\mathbb{R}$ *le segment initial* $\{y \in \mathbb{R} : y < x\}$ *est dénombrable.*

On rappelle à toutes fins utiles qu'un bon ordre est un ordre total pour lequel tout ensemble non-vide admet un plus petit élément.

1. Montrer que si $\mathcal{F}$ est un ensemble de fonctions entières tel que pour tout $z \in \mathbb{C}$ l'ensemble $\{f(z) : f \in \mathcal{F}\}$ est fini, alors $\mathcal{F}$ est fini.
2. On suppose $\aleph_1 < 2^{\aleph_0}$ et on se donne un ensemble $\mathcal{F}$ de fonctions entières de cardinal $\aleph_1$. Montrer que si f et g sont des éléments distincts de $\mathcal{F}$ alors l'ensemble $A_{f,g} = \{z \in \mathbb{C} : f(z) = g(z)\}$ est au plus dénombrable. En déduire qu'il existe un point $z \in \mathbb{C}$ tel que l'application

$$\Phi_z \colon \mathcal{F} \to \mathbb{C}, \quad f \mapsto f(z)$$

   est injective. Conclure que (E) implique l'hypothèse du continu.
3. On suppose l'hypothèse du continu et on se donne un bon ordre $<$ sur $\mathbb{C}$ tel que pour tout $z \in \mathbb{C}$ l'ensemble $\{w \in \mathbb{C} : w < z\}$ est au plus dénombrable. On se donne un ensemble S dénombrable et dense dans $\mathbb{C}$. Construire par récurrence transfinie une famille $(f_z)_{z\in\mathbb{C}}$ de fonctions entières telle que pour tout $z \in \mathbb{C}$ on ait
   (i) pour tout $w \in \mathbb{C}$ tel que $w < z$ on a $f_w(z) \neq f_z(z)$;
   (ii) pour tout $w \in \mathbb{C}$ tel que $w < z$ on a $f_z(w) \in S$.

   En déduire que l'hypothèse du continu implique (E).

Fonctions harmoniques

Exercice 4

1. Soit $U \subset \mathbb{C}$ un ouvert connexe, et soit $f\colon U \to \mathbb{C}$ une fonction holomorphe. On suppose que f ne s'annule pas. Montrer que $\log|f|$ est harmonique sur U.
2. Montrer que si $f\colon \mathbb{C}^* \to \mathbb{R}$ est harmonique, alors il existe une fonction holomorphe f sur $\mathbb{C}^*$ et une constante $b \in \mathbb{R}$ telles que $u = \Re(f) + b \cdot \log|z|$.

†Exercice 5

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ un ouvert connexe. Une 1-forme différentielle $\omega = pdx + qdy$ est *localement exacte* dans Ω si elle est exacte dans un voisinage de tout point $x \in \Omega$. Un fait, qu'on admettra, dit que ω est localement exacte si et seulement si $\int_\gamma \omega = 0$ pour tout $\gamma = \partial R$ où R est un rectangle contenu dans Ω, et que si cette condition est satisfaite, alors $\int_\gamma \omega = 0$ pour tout lacet $\gamma\colon [0,1] \to \Omega$ homologue à zéro dans Ω.

1. Pour une fonction harmonique $u\colon \Omega \to \mathbb{R}$, on a $du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy$; définissons ${}^*du = -\frac{\partial u}{\partial y}dx + \frac{\partial u}{\partial x}dy$. Soient u_1 et u_2 deux fonctions harmoniques $\Omega \to \mathbb{R}$, et soit γ un lacet homologiquement trivial dans Ω. Montrer que $\int_\gamma u_1{}^*du_2 - u_2{}^*du_1 = 0$.
2. Soit $R \in \mathbb{R}_{>0}$ et $U = \{z \in \mathbb{C} \mid 0 < |z| < R\} \subset \mathbb{C}$. Soit $u\colon D(0,R) \to \mathbb{R}$ une fonction continue, harmonique sur $U \subset D(0,R)$. Soit $r \in \mathbb{R}_{>0}$ avec $r < R$. Montrer qu'ils existent $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ tels que
$$\frac{1}{2\pi}\int_{\partial D(0,r)} u d\theta = \alpha \cdot \log r + \beta.$$
Montrer que $\alpha = 0$ et $\beta = u(0)$ si u est harmonique sur $D(0,R)$.

Exercice 6

Soit $U \subset \mathbb{C}$ ouvert connexe et $u\colon U \to \mathbb{R}$ harmonique. Montrer que les zéros de u ne sont pas isolés.

†Exercice 7

1. Soit $\mathbb{S} = \partial D(0,1)$. Montrer qu'il existe une fonction $P\colon D(0,1) \times \mathbb{S} \to \mathbb{C}$ telle que $u(x) = \int_\mathbb{S} u(z)P(x,z)dz$ pour tout $x \in D(0,1)$ et $u\colon U \to \mathbb{R}$ harmonique avec $\overline{D}(0,1) \subset U$.
2. Soit $u\colon U \to \mathbb{R}$ une fonction harmonique. Montrer que u est *analytique*, c.a.d. pour tout $a = (a_1, a_2) \in U$, ils existent un voisinage ouvert $a \in \Omega \subset U$ et des nombres $c_{ij} \in \mathbb{R}$ tels que $u(x,y) = \sum_{i,j \geq 0} c_{ij}(x-a_1)^i(y-a_2)^j$ pour tout $(x,y) \in \Omega$, où la série $\sum_{i,j\geq 0} c_{ij}(x-a_1)^i(y-a_2)^j$ est absolument convergente pour tout $(x,y) \in \Omega$.