

TD 6: SUITES DE FONCTIONS HOLOMORPHES

Olivier de Gaay Fortman

14 - 25 mars 2022

Les exercices marqués avec un [†] sont plus difficiles que les autres. Pour toute question ou remarque, veuillez envoyer un mail à olivier.de.gaay.fortman@ens.fr ou passer à mon bureau (T17, DMA, ENS).

Exercice 1

Le but de cet exercice est de montrer qu'il n'existe pas de fonction f holomorphe sur $\mathbb{C}$ tel que $f \circ f = \exp$. Supposons qu'il existe une telle fonction.

1. Montrer que $f(\mathbb{C}) = \mathbb{C}^*$.
2. Montrer qu'il existe un logarithme holomorphe g pour f sur $\mathbb{C}$.
3. Montrer qu'il existe un nombre complexe c telle que pour tout $z \in \mathbb{C}$ on ait $g \circ f(z) = z + c$.
4. Conclure.

[†]Exercice 2

Le but de cet exercice est de démontrer le théorème suivant :

Théorème. Soient U un ouvert de $\mathbb{C}$ et A une partie isolée de U . Soit f une fonction de A dans $\mathbb{C}$. Alors f s'étend en une fonction holomorphe de U dans $\mathbb{C}$.

Posons $W_0(z) = 1 - z$ et, pour $n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$, $W_n(z) = (1 - z) \exp(z + \frac{z^2}{2} + \dots + \frac{z^n}{n})$. Ces fonctions s'appellent les *facteurs principaux de Weierstrass*.

1. Soit $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ et $z \in \overline{D}(0, 1)$. Montrer que $|1 - W_n(z)| \leq |z|^{n+1}$.

Soit $\{z_n\}$ une suite de nombres complexes, où $z_n \neq 0$ pour tout n et $|z_n|$ tend vers l'infini lorsque n tend vers l'infini. Posons $r_n = |z_n|$. Soit $\{p_n\}$ une suite d'entiers non négatifs telle que, pour tout nombre positif r , la somme $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{r_n}\right)^{1+p_n}$ converge.

2. Montrer que le produit infini

$$f(z) = \prod_{n=1}^{\infty} W_{p_n} \left(\frac{z}{z_n} \right)$$

définit une fonction entière $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ qui possède un zéro en chaque point z_n et ne possède aucun autre zéro dans $\mathbb{C}$.

En fait, la question 2 se généralise aux sous-ensembles ouverts de $\mathbb{C}$, de sorte qu'on puisse construire des fonctions holomorphes sur U aux zéros z_n prescrits (les zéros formant une suite $\{z_n\}$ de nombres $z_n \in U$ telle que $z_n \rightarrow \partial U$ quand $n \rightarrow \infty$). Admettons ce fait.

3. Montrer qu'il existe une fonction holomorphe f sur U telle que pour tout ouvert V de $\mathbb{C}$ tel que U est strictement inclus dans V et V rencontre le bord de U , la fonction f ne s'étend pas à V . On dit que U est un *domaine d'holomorphie*.

Si K est une partie compacte de U on note

$$\widehat{K} = \left\{ z \in U : \forall f \in \mathcal{O}(U), |f(z)| \leq \sup_K |f| \right\}.$$

La partie $\widehat{K}$ s'appelle l'*enveloppe d'holomorphie* de K dans U . On dit que K est *holomorphiquement compact* dans U si $\widehat{K} = K$.

4. Donner un exemple de partie holomorphiquement compacte de $\mathbb{C}^*$ qui n'est pas holomorphiquement compacte dans $\mathbb{C}$.
5. Montrer que si K est une partie compacte de U , alors $\widehat{K}$ est fermé dans U et que si $\widehat{K}$ est compact, alors il est holomorphiquement compact dans U .
6. Montrer que si $U = \mathbb{C}$, alors $\widehat{K}$ est compact pour toute partie compacte K de $\mathbb{C}$. On dit que $\mathbb{C}$ est *holomorphiquement convexe*.

On veut montrer que le résultat de la question précédente reste vrai sans l'hypothèse $U = \mathbb{C}$. On se donne une partie compacte K de U , et on pose $\delta = d(K, \mathbb{C} \setminus U) > 0$.

7. Soit f une fonction holomorphe sur U . Soit $r \in]0, \delta[$. Montrer qu'il existe une constante positive M telle que pour tout $z \in K$ on ait tout $n \in \mathbb{N}$ on ait $\left| \frac{f^{(n)}(z)}{n!} \right| \leq \frac{M}{r^n}$.
En déduire que pour tout $z \in \widehat{K}$ et tout $n \in \mathbb{N}$ on a $\left| \frac{f^{(n)}(z)}{n!} \right| \leq \frac{M}{r^n}$.
8. En prenant pour f la fonction construite à la question 3, en déduire que $d(\widehat{K}, \mathbb{C} \setminus U) = \delta$, puis que $\widehat{K}$ est une partie compacte de U .
9. Montrer qu'il existe une suite $(K_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de parties holomorphiquement compactes dans U telle que $U = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} K_n$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$ on ait $K_n \subseteq \text{Int}(K_{n+1})$.
10. On écrit A comme l'image d'une suite injective sans point d'accumulation $(z_j)_{j \in \mathbb{N}}$ et pour tout $j \in \mathbb{N}$ on pose $n(j) = \min \{m \in \mathbb{N} \cup \{-1\} : z_j \in K_{m+1}\}$. Montrer que pour tout $j \in \mathbb{N}$, tout $\lambda \in \mathbb{C}$ et tout $\epsilon > 0$, il existe une fonction holomorphe g sur U telle que $g(z_j) = \lambda$, $g(z_i) = 0$ pour $i = 0, \dots, j-1$ et $\sup_{K_{n(j)}} |g| \leq \epsilon$ (avec la convention $K_{-1} = \emptyset$).
11. Démontrer le théorème en construisant une extension à f sous la forme d'une somme de fonctions holomorphes bien choisies.

Exercice 3

Soient α et β des éléments du disque unité ouvert. On note $\mathcal{F}_{\alpha,\beta}$ l'ensemble des fonctions f holomorphes sur le disque unité ouvert telles que $|f(z)| \leq 1$ pour tout $z \in \mathbb{D}$ et vérifiant $f(\alpha) = \beta$.

1. Déterminer la valeur du supremum

$$\sup_{f \in \mathcal{F}_{\alpha,\beta}} |f'(\alpha)|.$$

2. Déterminer si ce supremum est atteint et en donner les maximiseurs le cas échéant.

† Exercice 4

On note Φ l'ensemble des fonctions f holomorphes sur le disque unité ouvert et telle que pour tout z dans le disque on ait $0 < |f(z)| < 1$. Si $0 < c < 1$ on note Φ_c l'ensemble des éléments f de Φ tels que $f(0) = c$.

1. Déterminer la valeur du supremum (pour $0 < c < 1$)

$$\sup_{f \in \Phi_c} |f'(0)|$$

2. Déterminer la valeur du supremum

$$\sup_{f \in \Phi} |f'(0)|.$$

3. Déterminer si ces supremums sont atteints et, le cas échéant, déterminer les maximiseurs.

Indication : Pour $f \in \Phi$, construire un logarithme holomorphe pour f et remarquer que celui-ci envoie le disque unité dans le demi-plan de gauche. Composer alors ce logarithme par une homographie bien choisie qui envoie le demi-plan de gauche dans le disque unité, puis appliquer le lemme de Schwarz.

Exercice 5

Soit $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments non-nuls du disque unité ouvert telle que

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} (1 - |\alpha_n|) < +\infty.$$

1. Montrer que le produit infini

$$\prod_{n \geq 0} \left(\frac{\alpha_n - z}{1 - \overline{\alpha_n} z} \right) \cdot \frac{|\alpha_n|}{\alpha_n}$$

converge uniformément sur tout compact du disque unité ouvert vers une fonction holomorphe B , bornée sur le disque unité ouvert, dont les zéros sont exactement les α_n (comptés avec multiplicité). Il s'agit d'un *produit de Blaschke*.

2. En déduire qu'il existe une fonction holomorphe bornée sur le disque unité ouvert qui n'admet d'extension à aucun ouvert V qui rencontre le bord du disque unité.

Exercice 6

Soit f une fonction holomorphe sur un voisinage U de 0 telle que $f(0) = 0$. On pose $\lambda = f'(0)$ et on suppose que $0 < |\lambda| < 1$.

1. Montrer que si $\epsilon > 0$ est suffisamment petit alors la suite de fonctions holomorphes formées par les $\psi_n : z \mapsto \frac{f^n(z)}{\lambda^n}$ pour $n \in \mathbb{N}$ converge vers une fonction holomorphe uniformément sur $\mathbb{D}(0, \epsilon)$.
2. En déduire qu'il existe des voisinages V et W de 0 dans $\mathbb{C}$ et un biholomorphisme $\psi : V \rightarrow W$ tels que si $z \in V$ alors $f(z) \in V$ et $\psi \circ f(z) = \lambda \cdot \psi(z)$.
3. Comparer ce résultat avec l'exercice 10 du TD1.

† Exercice 7

Soit $(M_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de nombres réels strictement positifs telle que $M_0 = 1$ et

$$\sum_{n \geq 0} \frac{M_n}{M_{n+1}} < +\infty.$$

On va montrer le théorème suivant : *Il existe une fonction $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ non-nulle, $\mathcal{C}^\infty$ et à support compact, telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathbb{R}$, on ait*

$$|F^{(n)}(x)| \leq M_n.$$

1. On pose $\lambda_n = \frac{M_n}{M_{n+1}}$ pour $n \in \mathbb{N}$. Montrer que le produit infini

$$\left(\frac{\sin z}{z}\right)^2 \prod_{n \geq 0} \frac{\sin \lambda_n z}{\lambda_n z}$$

converge uniformément sur tout compact de $\mathbb{C}$ vers une fonction entière f .

2. Montrer que pour tout nombre réel x et tout entier $n \in \mathbb{N}$, on a

$$|x^k f(x)| \leq M_k \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2.$$

3. Montrer qu'il existe $A > 0$ tel que pour tout $N \in \mathbb{N}$, il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $z \in \mathbb{C}$ on a

$$|f(z)| \leq \frac{C_N}{1 + |z|^N} e^{A|\Im(z)|}.$$

4. En s'inspirant du théorème de Paley–Wiener (exercice 8 du TD3), conclure.