# TD 7: RÉSIDUS

Olivier de Gaay Fortman

4 - 8 avril 2022

Les exercices marqués avec un † sont plus difficiles que les autres. Pour toute question ou remarque, veuillez envoyer un mail à olivier.de.gaay.fortman@ens.fr ou passer à mon bureau (T17, DMA, ENS).

– – – – – – – – – – – – – – – – – – – – – – – – – – – – – – – – – – – – – – – – –

Rappelons les notions suivantes. Soit $U$ un ouvert de $\mathbb{C}$, $x \in U$ et $f\colon U - \{x\} \to \mathbb{C}$ une fonction holomorphe. Soit $r > 0$ tel que $D(x,r) \subset U$. On a vu dans le cours qu'il existe une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ de nombres complexes vérifiant les propriétés suivantes :

— la série $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-x)^n$ converge sur $D(x,r)$ ;

— la série $h(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{(z-x)^n}$ converge et définit une fonction holomorphe sur $\mathbb{C}-\{x\}$ ;

— $f(z) = h(z) + g(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n(z-x)^n$, quel que soit $z \in D(x,r) - \{x\}$.

**Définition.** *La série $h(z)$ est* la partie singulière de $f$ en $x$. *Le coefficient $a_{-1}$ de $(z-x)^{-1}$ est* le résidue $\operatorname{Res}(f,x)$ de $f$ en $x$. *La fonction $f$ est* méromorphe en $x$ *s'il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $a_n = 0$ pour tout $n \leq k$. Si $m \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$, on dit que $f$ a* un pôle (resp. zero) d'ordre $m$ en $x$, *si $a_{-m} \neq 0$ (resp. $a_m \neq 0$) et $a_n = 0$ quel que soit $n < -m$ (resp. $n < m$).* La valuation $v_x(f)$ de $f$ *en $x$ est définie par*

$$v_x(f) = \inf\{n \in \mathbb{Z}\colon a_n \neq 0\} \in \mathbb{Z} \subset \{\pm\infty\}.$$

– – – – – – – – – – – – – – – – – – – – – – – – – – – – – – – – – – – – – – – – –

## Exercice 1

Soit $U$ un ouvert de $\mathbb{C}$ et $a_1, \ldots, a_n \in U$. Soit $f$ une fonction holomorphe sur $U - \{a_1, \ldots, a_n\}$, et supposons que $f$ soit méromorphe en chaque $a_i$ (on dit par abus de langage que $f$ définit une fonction méromorphe sur $U$). Montrer que $\frac{f'}{f}$ est méromorphe sur $U$, avec des pôles simples aux pôles et zéros de $f$, et on que l'on a

$$\operatorname{Res}\left(\frac{f'}{f}, a\right) = v_a(f), \qquad \text{quel que soit } a \in U.$$

## Exercice 2

Soit $U \subset \mathbb{C}$ un ouvert, et soient $a \in U$, $r > 0$ tels que $\overline{D}(a,r) \subset U$. Soit $f$ holomorphe sur $U$. Supposons que $\partial D(a,r)$ ne contient aucun zéro de $f$. Montrer que le nombre de zéros de $f$ dans $D(a,r)$, comptés avec multiplicité, est égal à

$$\frac{1}{2i\pi}\int_{\partial D(a,r)} \frac{f'(z)}{f(z)}dz.$$

## Exercice 3

Soit $\lambda \in \mathbb{R}_{>0}$. Calculer

$$\operatorname{Res}\left(\frac{1}{z^2+\lambda^2}e^{1/z}, 0\right)$$

## Exercice 4

Soit $U \subset \mathbb{C}$ un ouvert non-vide. Montrer que $f$ est méromorphe sur $U$ si et seulement si tout point $a \in U$ a un voisinage ouvert $a \in \Omega \subset U$ sur lequel $f$ peut s'écrire sous la forme $f = g/h$, avec $g$ et $h$ holomorphes sur $U$.

## Exercice 5

Soit $U \subset \mathbb{C}$ ouvert et $f : U \to \mathbb{C}$ méromorphe.

1. Montrer que les pôles de $f$ sont isolés dans $U$.
2. Supposons que $\overline{D}(a,r) \subset U$ pour certains $a \in U$, $r \in \mathbb{R}_{>0}$. Montrer que $f$ n'a qu'un nombre fini de pôles dans $\overline{D}(a,r)$.

## Exercice 6

1. Soient $R > 0$ et $f : D(a,R) - \{a\} \to \mathbb{C}$ holomorphe. Montrer que :
   (a) $f$ est holomorphe en $a$ si et seulement si $f$ est bornée dans $D(a,r) - \{a\}$ quel que soit $r \in ]0,R[$ ;
   (b) $f$ est méromorphe mais non holomorphe en $a$ si et seulement si $|f(z)| \to +\infty$ quand $z \to a$ ;
   (c) $f$ a une singularité essentielle en $a$ si et seulement si l'image de $D(a,r) - \{a\}$ est dense dans $\mathbb{C}$, quel que soit $r \in ]0,R[$. *(En fait, l'image de $D(a,r) - \{a\}$ par $f$ contient $\mathbb{C} - \{b\}$ pour un certain $b \in \mathbb{C}$ (le grand théorème de Picard)).*
2. Soit $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ une fonction holomorphe. Montrer que si $f$ n'est pas un polynôme, alors $f(\mathbb{C} - \overline{D}(0,n))$ est un ouvert dense de $\mathbb{C}$, quel que soit $n \in \mathbb{N}$. En déduire que $f$ n'est pas injective.
3. Montrer que si $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ est holomorphe et bijective, alors il existe $\alpha \in \mathbb{C}^*$ et $\beta \in \mathbb{C}$ tels que $f(z) = az + b$ quel que soit $z \in \mathbb{C}$.

# Exercice 7

Soient $U \subset \mathbb{C}$ un ensemble ouvert simplement connexe, $f, g$ deux fonctions analytiques dans $U$, $\gamma\colon I = [0,1] \to U$ un lacet contenu dans $U$ et tel que $\gamma(I)$ ne contienne aucun des zéros de $f$. Supposons en outre que l'on ait $|g(z)| < |f(z)|$ sur l'ensemble $\gamma(I)$. Le but de cet exercice est de démontrer le résultat suivant :

**Théorème** (Théorème de Rouché)**.** *L'ensemble $\gamma(I) \subset U$ ne contient aucun des zéros de $f+g$ et si $a_1, \ldots, a_r$ (resp. $b_1, \ldots, b_s$) sont les zéros de $f$ (resp. de $f+g$) d'incice $\neq 0$ par rapport à $\gamma$, on a*

$$\sum_{h=1}^{r} j(a_h;\gamma) \cdot v_{a_h}(f) = \sum_{k=1}^{s} j(b_k;\gamma) \cdot v_{b_k}(f+g). \tag{1}$$

1. Montrer que $\gamma(I) \subset U$ ne contient aucun des zéros de $f+g$.
2. Considérons la fonction $h = (f+g)/f$. Montrer que $h$ est méromorphe dans $U$, et que l'on a
$$\frac{h'}{h} = \frac{(f+g)'}{f+g} - \frac{f'}{f}.$$
3. Soit $\Gamma = h \circ \gamma\colon I \to \mathbb{C}$ le lacet $t \mapsto h(\gamma(t))$. Montrer qu'il existe $r > 0$ tel que $|\Gamma(t) - 1| \leq r < 1$ quel que soit $t \in I$.
4. En déduire que $j(0, \Gamma) = 0$.
5. Conclure.

# †Exercice 8

Soient $\alpha \in \mathbb{C}^*$ et $\beta \in \mathbb{C}$. Proposons-nous de localiser les racines de l'équation

$$\tan(z) = \alpha(z - \beta). \tag{2}$$

Montrer que l'équation (2) a exactement $2n+1$ racines $z \in \mathbb{C}$ telles que $|\Re(z)| < n\pi$ et $|\Im(z)| < n\pi$, dès que $n$ est assez grand.

*Indice : Observer que les zéros de (2) sont ceux de l'équation*

$$\alpha(z-\beta)\cos(z) - \sin(z) = 0 \tag{3}$$

*et appliquer le théorème de Rouché avec $U = \mathbb{C}$ et $\gamma$ étant le périmètre du rectangle, juxtaposition des quatre chemins*

$$\begin{aligned}
\gamma_1\colon &\quad t \mapsto n\pi + it, && -n\pi \leq t \leq n\pi,\\
\gamma_2\colon &\quad t \mapsto ni\pi - t, && -n\pi \leq t \leq n\pi,\\
\gamma_3\colon &\quad t \mapsto -n\pi - it, && -n\pi \leq t \leq n\pi,\\
\gamma_4\colon &\quad t \mapsto -ni\pi + t, && -n\pi \leq t \leq n\pi.
\end{aligned}$$

---

– – – – – – – – – – – – – – – – – – – – – – – – – – – – – – – – – – – – – – – –

## †Exercice 9

On considère la série entière

$$f(z) = 1 + z^2 + z^4 + \cdots + z^{2^n} + \cdots$$

1. Montrer que le rayon de convergence $R$ est $R = 1$.
2. Soit $g(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n + \cdots$ une série entière de rayon de convergence 1. On suppose que les $a_n$ sont $\geq 0$ et que la série de terme général $a_n$ soit divergente. Montrer que lorsque $x$ est réel et tend vers 1 en restant $< 1$, $g(x)$ tend vers $+\infty$.
3. Montrer que l'on a

$$f(z) = z^2 + f(z^2) = z^2 + z^4 + f(z^4) = \cdots$$

4. En déduire que tous les points du cercle $\partial D(0, 1)$ sont singuliers pour $f$.

## †Exercice 10

Démontrer le théorème de Liouville en appliquant le théorème des résidus à l'intégrale

$$\int_\gamma \frac{f(z)dz}{(z-a)(z-b)}, \quad a \neq b \in \mathbb{C}, \quad \gamma(t) = Re^{it}.$$

## †Exercice 11

Prouver que l'on a

$$\int_0^\infty \frac{\sin(x)}{x} dx = \frac{\pi}{2}, \quad \int_0^\infty \frac{\sin^3(x)}{x^3} dx = \frac{3\pi}{8}.$$

## †Exercice 12

Montrer que l'on a

$$\int_0^{2\pi} e^{\cos(\theta)} \cos(n\theta - \sin(\theta)) d\theta = \frac{2\pi}{n!}, \quad n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}.$$