TD 8: Fonctions méromorphes

Olivier de Gaay Fortman · 11 - 15 avril 2022

Exercice 1

Montrer que

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{(z-n)^2} = \left(\frac{\pi}{\sin(\pi z)}\right)^2, \qquad \text{et puis que} \qquad \sum_{n=-\infty}^{\infty} 4/(1-2n)^2 = \pi^2.$$

Exercice 2

Soient U un ouvert de $\mathbb{C}$ et $z_0 \in U$. Pour f holomorphe sur $U - \{z_0\}$, montrer que :

1. Si f est holomorphe en z_0, alors $\mathrm{Res}(f, z_0) = 0$.
2. Si $f = g/h$, où g et h sont holomorphes sur U, si $g(z_0) \neq 0$, et si h a un zéro simple en z_0, alors $\mathrm{Res}(f, z_0) = g(z_0)/h'(z_0)$.
3. Si f a un pôle simple en z_0, et si g est holomorphe en z_0, alors $\mathrm{Res}(gf, z_0) = g(z_0)\mathrm{Res}(f, z_0)$.
4. Si $k \geq 1$, et $f = (z - z_0)^{-k} g$, où g est holomorphe sur U, alors $\mathrm{Res}(f, z_0) = g^{(k-1)}(z_0)/(k-1)!$.

Exercice 3

1. Pour $a \in \mathbb{R}_+^*, \xi \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$, calculer la valeur des intégrales suivantes :

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{\cos x}{x^2+a^2}\mathrm{d}x, \int_{\mathbb{R}} \frac{x\sin x}{x^2+a^2}\mathrm{d}x, \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{-ix\xi}}{(1+x^2)^2}\mathrm{d}x, \int_{\mathbb{R}} \frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)^{n+1}}, \int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2+6x+8}\mathrm{d}x, \int_0^{+\infty} \frac{\log x}{x^2+a^2}\mathrm{d}x.$$

1. Si $R \in \mathbb{C}(X, Y)$, calculer $\int_0^{2\pi} R(\cos t, \sin t)\,\mathrm{d}t$ en supposant que R est tel que l'intégrale est bien définie. Traiter les cas particuliers $R = \frac{a}{a^2+Y^2}$ et $R = \frac{1}{(a+X)^2}$.
2. Pour $n, p \in \mathbb{N}$ tels que $p \leq n-2$, calculer :

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^p}{1+x^n}\mathrm{d}x, \quad \int_0^{+\infty} \frac{x^{\frac{2}{3}}}{(x+1)^2(x+2)}\mathrm{d}x, \quad \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\mathrm{ch}(x)}\mathrm{d}x.$$

Exercice 4

Montrer que toutes les solutions de l'équation $z\sin z = 1$ sont réelles. (*Appliquer le théorème de Rouché à* $\varphi\colon z \mapsto z\sin z$ *et* $\psi\colon z \mapsto z\sin z - 1$.)

Exercice 5

Soit U un ouvert connexe de $\mathbb{C}$ et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions holomorphes sur U qui converge uniformément sur tout compact de U vers une fonction f.

1. On suppose que pour tout entier n la fonction f_n est injective. Montrer que f est injective ou constante.
2. Soit V un ouvert de $\mathbb{C}$. On suppose que pour tout entier n, l'image de f_n est contenue dans V. Montrer que l'image de f est contenue dans V ou que f est constante.

†Exercice 6

Soit U un ouvert connexe de $\mathbb{C}$.

1. Soit A une partie localement finie de U. Pour tout $\alpha \in A$, on se donne un entier m_α et des nombres complexes $b_0, \ldots, b_{m_\alpha}$. En utilisant le théorème de Mittag-Leffler ci-dessous, montrer qu'il existe une fonction holomorphe f sur U telle que pour tout $\alpha \in A$ et tout $k \in \{0, \ldots, m_\alpha\}$ on ait $f^{(k)}(\alpha) = b_k$.
2. Soient f et g des fonctions holomorphes sur U. On suppose que g n'est pas identiquement nulle et que f et g n'ont pas de zéro en commun. Montrer qu'il existe des fonctions holomorphes h_1 et h_2 sur U telles que $f + h_1 g = e^{h_2}$.
3. En déduire que $\mathcal{O}(U)$ est un *anneau de Bézout* : si $h_1, \ldots, h_n \in \mathcal{O}(U)$ alors il existe $h \in \mathcal{O}(U)$ tel que $h_1\mathcal{O}(U) + \cdots + h_n\mathcal{O}(U) = h\mathcal{O}(U)$.
4. Montrer que $\mathcal{O}(U)$ n'est pas principal. *(Construire une suite $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathcal{O}(U)$ telle qu'il n'existe pas de $h \in \mathcal{O}(U)$ tel que $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \left(\sum_{i=0}^{n} h_i\mathcal{O}(U)\right) = h\mathcal{O}(U)$).*

Théorème (Mittag-Leffler)**.** *Soit U un ouvert de $\mathbb{C}$. Soit $A \subset U$ une partie localement fini. Pour tout $\alpha \in A$, on se donne un entier m_α et des nombres complexes $a_1, \ldots, a_{m_\alpha}$. Il existe une fonction méromorphe f sur U telle que $f^{-1}(\{\infty\}) \subseteq A$ et pour tout $\alpha \in A$,*

$$f(z) \underset{z\to\alpha}{=} \sum_{n=1}^{m_\alpha} a_n (z-\alpha)^{-n} + O(1).$$

†Exercice 7

Pour $z \in \mathbb{C}$, on pose $f(z) := \int_0^{+\infty} \frac{e^{zt}}{t^t} \mathrm{d}t$.

1. Montrer que f est bien définie et holomorphe sur $\mathbb{C}$.
2. En appliquant la formule de Cauchy sur un quart d'anneau, montrer que si $z = x + i\left(\frac{\pi}{2} + \lambda\right)$ avec $x \in \mathbb{R}$ et $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$ alors $|f(z)| \leq \frac{1}{\lambda}$.
3. En utilisant la fonction f construire une fonction entière g qui tend vers 0 le long de toute demi-droite partant de l'origine.

†Exercice 8

Existe-t-il une suite de polynômes $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $P_n(0) = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $P_n(z) \underset{n\to+\infty}{\to} 0$ pour tout $z \in \mathbb{C}^*$?