TD 9: Fonctions elliptiques

Olivier de Gaay Fortman · 18 - 22 avril 2022

Pour toute question ou remarque, veuillez envoyer un mail à olivier.de.gaay.fortman@ens.fr ou passer à mon bureau (T17, DMA, ENS).

Exercice 1

Soient Λ un réseau dans $\mathbb{C}$ et $\wp$ la fonction de Weierstrass associée.

1. Soit f une fonction elliptique paire de période Λ. Montrer qu'il existe $c \in \mathbb{C}$ et des nombres complexes $a_1, \ldots, a_n$ et $b_1, \ldots, b_m$ que l'on déterminera tels que
$$f = c\frac{\prod_{i=1}^{n}(\wp - a_i)}{\prod_{j=1}^{m}(\wp - b_j)}.$$
2. Soit f une fonction elliptique de période Λ. Montrer qu'il existe des fractions rationnelles P et Q telles que
$$f = P(\wp) + \wp' Q(\wp).$$

Exercice 2

Soit $\Lambda \subset \mathbb{C}$ un réseau. La *fonction σ de Weierstrass* (relative à Λ) est défini par
$$\sigma(z) = \sigma(z;\Lambda) = z \prod_{\substack{\omega\in\Lambda \\ \omega\neq 0}} \left(1 - \frac{z}{\omega}\right) e^{(z/\omega)+\frac{1}{2}(z/\omega)^2}.$$

Démontrer les propriétés de σ suivantes :

1. La fonction σ définit bien une fonction entière $\sigma\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$.
2. La fonction σ admet un zéro simple à chaque $\lambda \in \Lambda$, mais ne s'annule pas ailleurs.
3. On a
$$\frac{d^2}{dz^2}\log\sigma(z) = -\wp(z) \quad \forall z \in \mathbb{C}\setminus\Lambda.$$
4. Pour chaque $\omega \in \Lambda$, il existent $a, b \in \mathbb{C}$ (dépendant de ω) tels que
$$\sigma(z+\omega) = e^{az+b}\sigma(z), \quad \text{quel que soit } z \in \mathbb{C}.$$

Exercice 3

Soit $\Lambda \subset \mathbb{C}$ un réseau et $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ une fonction elliptique. Pour $a \in \mathbb{C}$, soit

$$P_a = \{a + t_1\omega_1 + t_2\omega_2 \mid 0 \le t_1 \le 1, 0 \le t_2 \le 1\}.$$

Choisissons $a \in \mathbb{C}$ tel que ∂P_a ne contient ni zéro ni pôle de f. Pour $[\omega] \in \mathbb{C}/\Lambda$, définissons $\mathrm{ord}_{[\omega]}(f) = \mathrm{ord}_\omega(f)$ pour $\omega \in P_a$ tel que $\omega \equiv [\omega] \mod \Lambda$.

1. Montrer que $\mathrm{ord}_{[\omega]}(f)$ ne dépend pas du choix de $a \in \mathbb{C}$.
2. Montrer que il n'y a qu'un nombre fini de $z \in \mathbb{C}/\Lambda$ tel que $\mathrm{ord}_z(f) \neq 0$.
3. Observer que $\mathbb{Z}^{(\mathbb{C}/\Lambda)}$ s'identifie avec le groupe des sommes formelles $\sum_{z \in \mathbb{C}/\Lambda} n_z \cdot (z)$ avec $n_z \neq 0$ que pour un nombre fini de $z \in \mathbb{C}/\Lambda$. Par la question précédente, la valeur
$$\mathrm{div}(f) = \sum_{\omega \in \mathbb{C}/\Lambda} \mathrm{ord}_\omega(f) \cdot (\omega) \in \mathbb{Z}^{(\mathbb{C}/\Lambda)}.$$
est bien défini.
4. Soit $\mathrm{Div}^0(\mathbb{C}/\Lambda) \subset \mathbb{Z}^{(\mathbb{C}/\Lambda)}$ le sous-groupe des sommes $\sum_{z \in \mathbb{C}/\Lambda} n_z \cdot (z)$ avec $\sum_z n_z = 0$. Montrer que la fonction
$$\mathrm{div} : \mathbb{C}(\Lambda)^* \to \mathbb{Z}^{(\mathbb{C}/\Lambda)}$$
est un homomorphisme de groupes, et que $\mathrm{div}(\mathbb{C}(\Lambda)^*) \subset \mathrm{Div}^0(\mathbb{C}/\Lambda)$.

Exercice 4

Soit $\Lambda \subset \mathbb{C}$ un réseau. Soient $n_1, \ldots, n_r \in \mathbb{Z}$ et $z_1, \ldots, z_r \in \mathbb{C}$ tels que

$$\sum_{i=1}^r n_i = 0 \quad \text{et} \quad \sum_{i=1}^r n_i z_i \in \Lambda.$$

Montrer qu'il existe une fonction elliptique $f(z) \in \mathbb{C}(\Lambda)$ telle que

$$\mathrm{div}(f) = \sum_{i=1}^r n_i \cdot (z_i).$$

(*Indice : Si* $\sum_{i=1}^r n_i \cdot z_i = 0$, *montrer que l'on puisse prendre* $f(z) = \prod \sigma(z - z_i)^{n_i}$.)

Exercice 5

Pour un réseau $\Lambda \subset \mathbb{C}$ un réseau, soit Σ le homomorphisme $\Sigma : \mathrm{Div}^0(\mathbb{C}/\Lambda) \to \mathbb{C}/\Lambda$ défini par $\sum_z n_z \cdot (z) \mapsto \sum_z n_z \cdot z$. Prouver le théorème suivant :

Théorème. *Soit $\Lambda \subset \mathbb{C}$ un réseau. Alors la suite suivante est exacte :*

$$1 \longrightarrow \mathbb{C}^* \longrightarrow \mathbb{C}(\Lambda)^* \xrightarrow{\mathrm{div}} \mathrm{Div}^0(\mathbb{C}/\Lambda) \xrightarrow{\Sigma} \mathbb{C}/\Lambda \longrightarrow 0$$

Exercice 6

Soit $\Lambda = \mathbb{Z}\omega_1 + \mathbb{Z}\omega_2 \subset \mathbb{C}$ un réseau. Supposons que $\theta\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ est une fonction entière telle que ils existent $a_1, a_2 \in \mathbb{C}$ tels que

$$\theta(z+\omega_1) = a_1\theta(z) \quad \text{et} \quad \theta(z+\omega_2) = a_2\theta(z) \quad \text{quel que soit} \quad z \in \mathbb{C}.$$

Montrer qu'il existent $b, c \in \mathbb{C}$ tels que $\theta(z) = be^{cz}$ quel que soit $z \in \mathbb{C}$.

Exercice 7

Soit $\Lambda \subset \mathbb{C}$ un réseau.

1. Montrer que pour tout $z, a \in \mathbb{C} \setminus \Lambda$, on a

$$\wp(z) - \wp(a) = -\frac{\sigma(z+a)\sigma(z-a)}{\sigma(z)^2\sigma(a)^2}.$$

   (*Indice : Comparer zéros et pôles.*)
2. Montrer que $\sigma(nz)/\sigma(z)^{n^2} \in \mathbb{C}(\Lambda)$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$.

Exercice 8

Pour un réseau $\Lambda \subset \mathbb{C}$, définissons la *fonction zêta de Weierstrass* $\zeta_W(z)$ comme

$$\zeta_W(z) = \frac{1}{z} + \sum_{\substack{\omega\in\Lambda\\ \omega\neq 0}} \left(\frac{1}{z-\omega} + \frac{1}{\omega} + \frac{z}{\omega^2} \right).$$

1. Montrer que

$$\frac{d}{dz}\log\sigma(z) = \zeta_W(z), \quad \text{et} \quad \frac{d}{dz}\zeta_W(z) = -\wp(z).$$

2. Montrer que

$$\zeta_W(-z) = -\zeta_W(z),$$

   et que pour tout $\omega \in \Lambda$, il existe $\eta(\omega) \in \mathbb{C}$, tel que

$$\zeta_W(z+\omega) = \zeta_W(\zeta) + \eta(\omega).$$

3. Si $\omega \notin 2\Lambda$, montrer que $\eta(\omega) = 2\zeta_W(\omega/2)$.
4. Montrer que l'application $\eta\colon \Lambda \to \mathbb{C}$ est bien définie et bilinéaire.
5. Écrivons $\Lambda = \mathbb{Z}\omega_1 + \mathbb{Z}\omega_2$ avec $\Im(\omega_1/\omega_2) > 0$. Prouver la *relation de Legendre*

$$\omega_1\eta(\omega_2) - \omega_2\eta(\omega_1) = 2\pi i.$$

   (*Indice : Calculer l'intégrale de $\zeta_W(z)$ atour d'un parallélogramme fondamental P_a.*)