# Feuille d'exercices n° 2

**Éléments de raisonnement mathématique.**

## 1 Implication, réciproque, contraposée.

### 1.1 Retour sur l'implication.

Dans ce paragraphe, $A$ et $B$ désignent des propositions.
Revenons sur la table de vérité de l'implication $A \Rightarrow B$ (on appelle $A$ la prémisse et $B$ la conclusion) :

| $A$ | $B$ | $A \Rightarrow B$ |
|---|---|---|
| vrai | vrai | vrai |
| vrai | faux | faux |
| faux | vrai | vrai |
| faux | faux | vrai |

Les deux premières lignes ne posent généralement pas de problème. Plusieurs arguments peuvent aider à nous convaincre que les deux dernières lignes sont également cohérentes avec notre pratique mathématique:

- La seule façon de démontrer qu'une implication est fausse (par exemple, pour montrer que "pour tout $x \in \mathbb{R}$, si $x^2 \geq 1$ alors $x \geq 1$" est fausse), c'est de produire un contre-exemple qui vérifie la prémisse et pas la conclusion (ici par exemple, -3 vérifie $(-3)^2 \geq 1$ mais pas $-3 \geq 1$).
- Pour démontrer une implication, on suppose que la prémisse est vraie… On ne s'occupe pas des cas où la prémisse est fausse !
- Mais surtout, nous serons tous d'accord pour dire que l'implication "Pour tout entier naturel $n$, si $n$ est divisible par 4 alors $n$ est pair" est vraie. Cela veut bien dire (entre autres) que l'implication "8 est divisible par 4 $\Rightarrow$ 8 est pair" est vraie, mais aussi que les implications "6 est divisible par 4 $\Rightarrow$ 6 est pair" et "9 est divisible par 4 $\Rightarrow$ 9 est pair" sont également vraies ! On retrouve bien là les deux dernières lignes de la table de vérité.

Cette table de vérité est aussi tout-à-fait cohérente avec la façon dont nous utilisons une implication dans un raisonnement : en effet, quand nous savons qu'une implication $A \Rightarrow B$ est vraie (en général il y a des variables, il s'agit en fait d'une implication $\forall x \quad A[x] \Rightarrow B[x]$), nous pouvons l'utiliser dans deux situations :

- Si nous savons que $A$ est vraie, nous pouvons en déduire que $B$ est vraie.
- Si nous savons que $B$ est fausse, nous pouvons en déduire que $A$ est fausse.

MAIS :

- Si nous savons que $A$ est fausse, nous ne pouvons rien en déduire sur $B$
  (lignes 3 et 4 de la table de vérité).
- Si nous savons que $B$ est vraie, nous ne pouvons rien en déduire sur $A$
  (lignes 1 et 3 de la table de vérité).

Par exemple, nous savons que pour tout entier naturel $n$, si $n$ est divisible par 4, alors $n$ est pair, c'est-à-dire $\forall n \in \mathbb{N} \quad 4|n \Rightarrow n$ est pair.

- Si nous considérons un entier $k$ dont nous savons qu'il est divisible par 4, alors nous pouvons affirmer que $k$ est pair.
- Si nous considérons un entier $m$ dont nous savons qu'il n'est pas pair, alors nous pouvons affirmer que $m$ n'est pas divisible par 4.
- Si nous considérons un entier $p$ dont nous savons qu'il est pair, nous ne pouvons pas affirmer qu'il est divisible par 4 (d'ailleurs, 6 est pair et n'est pas divisible par 4, 8 est pair et est divisible par 4).
- Si nous considérons un entier $r$ dont nous savons qu'il n'est pas divisible par 4, nous ne pouvons pas affirmer qu'il est pair (d'ailleurs, 7 n'est pas divisible par 4 et n'est pas pair, 6 n'est pas divisible par 4 et est pair).

**Exercice 1 (Les cosmonautes*).** Une réunion de cosmonautes du monde entier a lieu à Paris. Les cosmonautes américains portent tous une chemise rouge.

1. À l'aéroport on voit quelqu'un qui porte une chemise blanche.
   Est-il cosmonaute américain ?
2. À côté de la personne précédente, on voit quelqu'un qui porte une chemise rouge.
   Est-il cosmonaute américain ?
3. Le haut-parleur annonce l'arrivée d'un cosmonaute russe.
   Porte-t-il une chemise rouge ?
4. Dans le hall, on voit un cosmonaute américain qui porte un manteau.
   Porte-t-il une chemise rouge ?

## 1.2 Réciproque et équivalence.

La *réciproque* de l'implication $A \Rightarrow B$ est l'implication $B \Rightarrow A$. Une implication et sa réciproque sont vraies ou fausses indépendamment l'une de l'autre.
L'équivalence est une "double implication", c'est-à-dire que pour toutes propositions $A$ et $B$,

$$A \Leftrightarrow B \text{ si et seulement si } (A \Rightarrow B \text{ et } B \Rightarrow A)$$

.

**Exercice 2 (Implication et réciproque*).** Pour chaque implication dire si elle est vraie ou fausse, formuler sa réciproque, et dire si la réciproque est vraie ou fausse.

1. Pour tout réel $x$, si $(x-1)(x-2) = 0$ alors $x = 1$.
2. Pour tout points $A, B$ et $M$ du plan, si $M$ est le milieu de $[AB]$ alors $MA = MB$.
3. Si un triangle est isocèle, alors ses angles à la base sont égaux.

### 1.3 Contraposée.

La *contraposée* d'une implication est l'implication NON($B$) $\Rightarrow$ NON($A$). Une implication et sa contraposé sont équivalentes, c'est-à-dire qu'elles sont toutes les deux vraies ou toutes les deux fausses. Pour montrer une implication, on peut donc utiliser un *raisonnement par contraposée*, c'est-à-dire montrer sa contraposée.

**Exercice 3 (Contraposée*).** Écrire les contraposées des implications suivantes. Sont-elles vraies ou fausses ?

1. Pour tous réels $x$ et $y$, si $xy = 0$ alors ($x = 0$ ou $y = 0$).
2. Si $ABC$ est un triangle rectangle en $A$, alors $BC^2 = AB^2 + AC^2$.
3. $\forall n \in \mathbb{N} \quad n$ pair $\Rightarrow n$ non premier.

**Exercice 4 (**).** On dira que deux entiers $a$ et $b$ ont même parité lorsqu'ils vérifient
($a$ pair $\Leftrightarrow$ $b$ pair).

1. Montrer que deux entiers $a$ et $b$ ont même parité si et seulement si ils vérifient
   [($a$ pair $\Rightarrow$ $b$ pair) et ($a$ impair $\Rightarrow$ $b$ impair)]
2. Montrer qu'un entier et son carré ont toujours même parité.

## 2 Raisonnement par l'absurde

Pour montrer qu'une proposition $A$ est vraie par un *raisonnement par l'absurde*, on montre qu'il n'est pas possible que sa négation NON($A$) soit vraie.
Dans la pratique, pour montrer une proposition $A$ par l'absurde :

- On suppose que NON($A$) est vraie (il est pertinent de formuler explicitement NON($A$), qui va donc être considérée comme vraie).
- On déduit de NON($A$) une proposition $C$ dont on sait qu'elle est fausse (éventuellement parce qu'elle est en contradiction avec une hypothèse que l'on a faite).
- On en déduit que NON($A$) est fausse, et donc que $A$ est vraie.

Pour utiliser un raisonnement par l'absurde, il est donc important de savoir formuler la négation d'une proposition. Rappelons certaines règles permettant de le faire : Pour toutes propositions $A$ et $B$,

- NON($A$ ET $B$) est équivalente à [NON($A$) OU NON($B$)]
  Exemple (la variable $n$ désigne un entier naturel) :
  la négation de "$n$ est pair ET $n \geq 10$" est "$n$ est impair OU $n < 10$".
- NON($A$ OU $B$) est équivalente à [NON($A$) ET NON($B$)]
- NON ($A \Rightarrow B$) est équivalente à [$A$ ET NON($B$)]
- NON ($\forall x\ A[x]$) est équivalente à $\exists x$ NON($A[x]$)
- NON ($\exists x\ A[x]$) est équivalente à $\forall x$ NON($A[x]$)

**Exercice 5 (Négation d'une proposition*).** Reprendre les propositions des exercices 6 et 7 de la feuille de TD 1, et écrire leurs négations, à partir des deux formulations avec ou sans quantificateurs et connecteurs.

**Exercice 6 (Raisonnements par l'absurde**).**

1. Montrer que 0 n'a pas d'inverse dans $\mathbb{R}$.
2. Montrer que $\sqrt{2}$ est irrationnel

## 3 Exercices récapitulatifs et d'évaluation

**Exercice 7.** Montrer que pour tous réels $a$ et $b$, si ($a \neq -1$ ET $b \neq -1$) alors $a + b + ab \neq -1$.

**Exercice 8.** Soient $a, b, c$ des réels strictement positifs vérifiant :

(1) $abc > 1$ et

(2) $a + b + c < \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$.

Démontrer :

1. qu'aucun des réels $a, b, c$ ne peut être égal à 1.
2. que l'un au moins des réels $a, b, c$ est strictement supérieur à 1.
3. que l'un au moins des réels $a, b, c$ est strictement inférieur à 1.

**Exercice 9.** Démontrer qu'un triangle équilatéral ne peut avoir ses trois sommets à coordonnées entières.
Considérons pour cela un triangle $ABC$ équilatéral et dont les sommets sont à coordonnées entières (figure ci-dessous) :

1. Démontrer que les aires des triangles $BCD$, $ACF$ et $ABE$ sont rationnelles.
2. Démontrer que le carré du côté $c$ du triangle équilatéral $ABC$ est un entier.
3. Exhiber une contradiction à propos de l'aire du triangle $ABC$ qui est égale à $\dfrac{\sqrt{3}}{4}c^2$