

Limites hydrodynamiques

Du point de vue microscopique au point de vue
macroscopique

Pierre Gervais

October 9, 2021

Différents niveaux de description

Niveau macroscopique

Instant t , point x

- ▶ masse : $R_t(x) \geq 0$
- ▶ vitesse : $U_t(x) \in \mathbb{R}^3$
- ▶ température : $T_t(x) \geq 0$
- ▶ viscosité, pression, conductivité thermique...

Exemple (Navier-Stokes incompressible)

$$\begin{cases} \partial_t U + U \cdot \nabla_x U = \nu \Delta_x U - \nabla_x P, \\ \operatorname{div}_x U = 0 \end{cases}$$

Différents niveaux de description

Niveau microscopique

$N \approx 10^{26}$ particules, de positions $x_i(t) \in \mathbb{R}^3$, vitesses $v_i(t) \in \mathbb{R}^3$

$$\begin{cases} \dot{x}_i = v_i \\ \dot{v}_i = \text{interactions} \end{cases}$$

Différents niveaux de description

Point de vue mésoscopique

Théorie cinétique des gaz : comportement **statistique** micro \rightarrow phénomènes macro

$$\int_{\mathcal{V}_1 \times \mathcal{V}_2} F_t(x, v) dx dv = \begin{array}{l} \text{Nb particules de position } x \in \mathcal{V}_1 \\ \text{et de vitesse } v \in \mathcal{V}_2 \end{array}$$

- ▶ Masse : $R_t(x) = \int F_t(x, v) dv$
- ▶ Qté. de mouvement : $R_t(x)U_t(x) = \int F_t(x, v) v dv$
- ▶ Énergie : $\frac{1}{2}R_t(x)|U_t(x)|^2 + \frac{3}{2}R_t(x)T_t(x) = \int F_t(x, v) \frac{|v|^2}{2} dv$

Différents niveaux de description

Point de vue mésoscopique

- ▶ 1860 : loi de distribution de Maxwell

$$F_t(x, v) = \frac{R_t(x)}{(2\pi T_t(x))^{3/2}} \exp\left(-\frac{|v - U_t(x)|^2}{2T_t(x)}\right) \quad (\text{ETL})$$

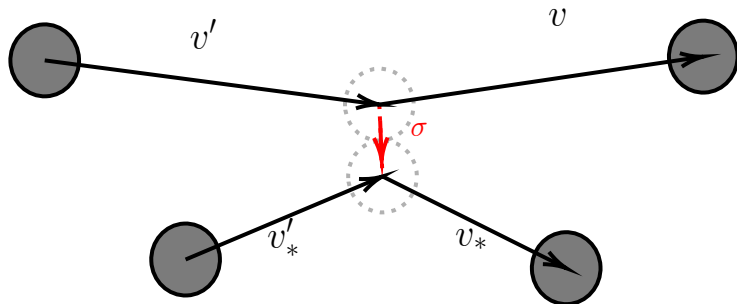
- ▶ 1872 : équation de Boltzmann :

$$\begin{aligned} \partial_t F_t + v \cdot \nabla_x F_t &= \text{variation du nombre de} \\ &\quad \text{particules de vitesse } v \\ &=: Q\left(F_t(x, \cdot), F_t(x, \cdot)\right)(v) \quad (\text{BE}) \end{aligned}$$

Différents niveaux de description

Point de vue mésoscopique

$$Q(f, f)(v) = \int_{\mathbb{R}_{v_*}^3 \times \mathbb{S}_\sigma^2} B(v - v_*, \sigma) (f(v'_*)f(v') - f(v)f(v_*)) dv_* d\sigma$$



$$v' + v'_* = v + v_*$$
$$|v'|^2 + |v'_*|^2 = |v|^2 + |v_*|^2$$

Différents niveaux de description

Point de vue mésoscopique

Masse, quantité de mouvement, énergie : conservation micro. \Rightarrow
conservation macro

Théorème (H-Theorème de Boltzmann)

L'entropie

$$H_t(x) := - \int F_t(x, v) \log F_t(x, v) dv$$

est croissante et maximisée par les ETL:

$$\frac{R(x)}{(2\pi T(x))^{3/2}} \exp\left(-\frac{|v - U(x)|^2}{2T(x)}\right)$$

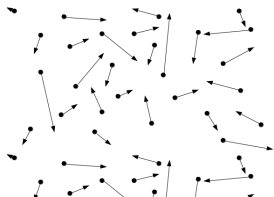
Lemme

$$Q(F, F) = 0 \Leftrightarrow F \text{ est un ETL.}$$

Différents niveaux de description

Récapitulatif

| Macroscopique (NSI) | Mésoscopique | Microscopique |
|---|--|---|
| $U_t(x), R_t(x), T_t(x)$ | $F_t(x, v)$ | $(x_i(t), v_i(t))_{i=1}^N$ |
| Vitesse, densité, température | Densité de particules de vitesse v et position x | Position exacte d'une particule n° i |
| Champs sur \mathbb{R}^3 | Densité sur $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ | Vecteurs de \mathbb{R}^{6N} |
| $\partial_t U + U \cdot \nabla_x U = \nu \Delta_x U - \nabla_x P$ | $\partial_t F + v \cdot \nabla_x F = Q(F, F)$ | $\dot{v}_i =$ interactions entre particules |
| À l'ETL | Tend vers un ETL | |
| Solutions faibles globales, donnée initiale incompressible d'énergie finie unicité non-connue | Solutions faibles globales, don. ini. de masse, énergie et entropie finie unicité non-connue | Unique solution |



Le problème des limites hydrodynamiques

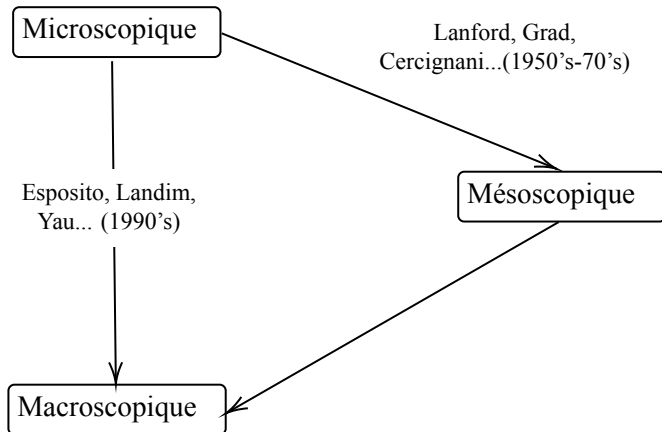
Le sixième problème de Hilbert

*Le livre de M. Boltzmann sur les Principes de la Mécanique nous incite à établir et à discuter du point de vue mathématique d'une manière complète et rigoureuse les méthodes basées sur l'idée de **passage à la limite**, et qui de la conception atomique nous conduisent aux lois du mouvement des continua.*

D. Hilbert au 2ème congrès international des mathématiciens, Paris, 1900

Le problème des limites hydrodynamiques

Le sixième problème de Hilbert



Le problème des limites hydrodynamiques

Pourquoi ?

- ▶ Axiomatisation de la physique
- ▶ Approximer Boltzmann par un modèle hydrodynamique
- ▶ Développer des schémas numériques

Le problème des limites hydrodynamiques

Limite hydrodynamique de Boltzmann

$$\partial_t F + v \cdot \nabla_x F = Q(F, F)$$



écriture en variables macro

$$\varepsilon \partial_t F^\varepsilon + v \cdot \nabla_x F^\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon} Q(F^\varepsilon, F^\varepsilon)$$

Temps-distance moyen entre deux collisions = $\varepsilon \ll 1$

$$F_t^\varepsilon(x, v) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} F_t^0(x, v) = R_t(x) \exp\left(-\frac{|v - U_t(x)|^2}{2T_t(x)}\right)$$

Le problème des limites hydrodynamiques

Limite hydrodynamique de Boltzmann

Gaz quasiment à l'équilibre thermodynamique (global) M :

$$F^\varepsilon = M + \varepsilon f^\varepsilon, \quad M(v) = \frac{e^{-|v|^2/2}}{(2\pi)^{3/2}}$$



$$\partial_t f^\varepsilon + \mathcal{L}^\varepsilon f^\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon} Q(f^\varepsilon, f^\varepsilon), \quad (\text{BE}^\varepsilon)$$

$$\mathcal{L}^\varepsilon := \frac{1}{\varepsilon^2} (\varepsilon v \cdot \nabla_x + Q(M, \cdot) + Q(\cdot, M))$$

Le problème des limites hydrodynamiques

Limite hydrodynamique de Boltzmann

Théorème (Bardos, Golse, Levermore, Saint-Raymond ('91-'03))

Si $(f_t^\varepsilon(x, v))_\varepsilon$ sont **des solutions faibles** de l'équation (BE^ε) , alors elles convergent en un sens **faible** vers un $f_t^0(x, v)$ de la forme

$$f_t^0(x, v) = \left(\rho_t(x) + u_t(x) \cdot v + \frac{1}{2}(|v|^2 - 3)\theta_t(x) \right) M$$

où ρ, u, θ satisfont le système de Navier-Stokes-Fourier incomp. :

$$\begin{cases} \partial_t u + u \cdot \nabla_x u = \nu \Delta_x u - \nabla_x p, \\ \partial_t \theta + u \cdot \nabla_x \theta = \kappa \Delta_x \theta, \\ \operatorname{div}_x u = 0, \quad \nabla_x(\rho + \theta) = 0, \end{cases} \quad (\text{NSFI})$$

et ν, κ ne dépendent que de Q et M .

Remarque : (BE) et (NSFI) admettent des solutions faibles globales, on ne sait pas si elles sont uniques.

Le problème des limites hydrodynamiques

Limite hydrodynamique de Boltzmann

But : BGL fort

Si $f_{\text{in}} \in \mathbf{X}_{x,v}$, il existe $T > 0$ et d'**uniques** solution **fortes** f^ε de l'équation (BE^ε) sur un **intervalle** $[0, T)$. Celles-ci convergent en un sens **fort** vers un f^0 , qui est donc automatiquement

$$f_t^0(x, v) = \left(\rho_t(x) + u_t(x) \cdot v + \frac{1}{2}(|v|^2 - 3)\theta_t(x) \right) M$$

pour certains ρ, u, θ satisfaisant le système de Navier-Stokes-Fourier incompressible

$$\begin{cases} \partial_t u + u \cdot \nabla_x u = \nu \Delta_x u - \nabla_x p, \\ \partial_t \theta + u \cdot \nabla_x \theta = \kappa \Delta_x \theta, \\ \operatorname{div}_x u = 0, \quad \nabla_x(\rho + \theta) = 0. \end{cases} \quad (\text{NSFI})$$

L'idéal étant $\mathbf{X}_{x,v}$ de la forme $L^1((1 + |v|^2) dv dx)$

Le problème des limites hydrodynamiques

Limite hydrodynamique de Boltzmann

- ▶ 1991, Bardos-Ukai : $\|f_{\text{in}}\|_E \ll 1$ et $T = \infty$

$$E := \left\{ f : |f(v)| \leq C \exp(-a|v|^2) \right\}, \quad a > 0$$

- ▶ 2019, Gallagher-Tristani : ~~$\|f_{\text{in}}\|_E \ll 1$~~ , $T =$ premier blow-up de (NSFI),

Remarque : Dans ce cadre, $\mathcal{L} = Q(M, \cdot) + Q(\cdot, M)$ est autoadjoint.

- ▶ 2021, G. : ~~$\|f_{\text{in}}\|_{\mathcal{E}} \ll 1$~~ , $T =$ premier blow-up de (NSFI)

$$\mathcal{E} := L_v^1 H_x^s (1 + |v|^{3+0} dv).$$

Remarque : Lorsque la donnée initiale est petite, $T = \infty$.

Le problème des limites hydrodynamiques

Mon approche

- ▶ Théorie d'élargissement de S. Mischler et C. Mouhot ('05-'17)
- ▶ Suivant des idées de M. Briant, S. Merino et C. Mouhot, et I. Gallagher et I. Tristani, découper la solution de (BE^ε) en $f^\varepsilon = f^0 + f^{\varepsilon,1} + f^{\varepsilon,2} + f^{\varepsilon,3} + f^{\varepsilon,4}$
 - ▶ f^0 est la solution de Navier-Stokes-Fourier incompressible
 - ▶ $f^{\varepsilon,1} \in \mathcal{E}$ satisfait une équation bien posée
 - ▶ $f^{\varepsilon,2} \in E$ est étudié comme dans Bardos-Ukai/Gallagher-Tristani (modulo un terme supplémentaire à étudier précisément)
 - ▶ le terme $f^{\varepsilon,3} \in E$ contient les ondes acoustiques
 - ▶ le terme $f^{\varepsilon,4} \in E$ dépend explicitement de $f^{\varepsilon,1}$
 - ▶ la donnée initiale est judicieusement répartie entre les $f^{\varepsilon,j}$

Merci de votre attention !