

Théorie géométrique des modèles

Paul Wang

Table des matières

1	Introduction	1
2	Notions de base en théorie des modèles	1
3	Théorie de la stabilité	6
4	Théories instables, Métastabilité	10
	Références	14

1 Introduction

Dans les années 1960, Morley ([Mor65]) a démontré que si une théorie n’a, à isomorphisme près, qu’un seul modèle de cardinal κ , où κ est un cardinal indénombrable, alors elle n’a qu’un modèle de cardinal λ , pour tout cardinal indénombrable λ . Les outils utilisés pour démontrer ce théorème ont par la suite été développés et généralisés, notamment par Shelah dans [She71], donnant naissance à la “théorie de la stabilité”. Cette dernière fournit un cadre général pour l’étude des théories satisfaisant certaines conditions, appelées *théories stables*, et s’intéresse à la “géométrie” des ensembles et structures définissables, en définissant par exemple des notions d’indépendance et de généricité. De nombreux résultats de structure, par exemple sur les groupes stables, ont été obtenus à l’aide de ces outils.

Cependant, ces derniers ne pouvant être utilisés tels quels si l’on veut analyser des théories instables, il est nécessaire de les adapter. Recourir à la théorie de la *métastabilité* est l’une des méthodes employées dans ce but.

Après avoir défini des termes importants en théorie des modèles, je présenterai quelques notions de théorie de la stabilité, avant d’aborder la métastabilité et l’exemple des corps valués algébriquement clos.

2 Notions de base en théorie des modèles

Cette section vise à présenter des notions générales de théorie des modèles, importantes pour la suite. Pour plus de détails, on pourra consulter [Mar02] (Chap. 1 à 4).

2.1 Structures, formules et ensembles définissables

Une part importante de la théorie des modèles consiste à étudier des structures, en considérant leurs sous-ensembles qui sont définissables par des formules du premier ordre. Pour cela, il faut commencer par choisir un langage d'étude. Un *langage* est la donnée d'un ensemble de symboles de relations et de fonctions, les arités étant spécifiées. Une fonction d'arité nulle est vue comme une constante. Par convention, un symbole $=$, de relation binaire, est toujours inclus dans le langage. On pourra omettre de l'écrire. Par exemple, le langage des anneaux, $\mathcal{L}_{ann} = \{0, 1, +, -, \cdot\}$ contient, en plus du symbole d'égalité, deux constantes, 0 et 1, et trois fonctions binaires, $+$, $-$, et $\cdot$.

Une fois qu'on a fixé un langage, on peut, d'une part, définir la classe des *formules du premier ordre* dans ce langage. Il s'agit de formules faisant intervenir les symboles du langage, des variables, des connecteurs logiques "et", "ou" et "non", qu'on note respectivement $\wedge$, $\vee$, et $\neg$, et des quantificateurs. Cette classe est définie par induction, avec des règles de syntaxe assez naturelles. Il est important de noter qu'en logique du premier ordre, les quantificateurs ne portent que sur les éléments, pas sur les parties.

Si ϕ est une formule du premier ordre, on pourra la noter $\phi(x)$, si x est un uplet de variables contenant les variables libres, i.e. non quantifiées, apparaissant dans ϕ .

Par exemple, la formule $\phi(x) := \exists y (x \cdot y = 1 \wedge y \cdot x = 1)$ est une formule dans le langage des anneaux, où la variable x est libre, et la variable y est quantifiée.

D'autre part, pour un langage $\mathcal{L}$ donné, on peut définir ce qu'est une $\mathcal{L}$ -structure. Il s'agit d'un ensemble S , muni d'interprétations des symboles de $\mathcal{L}$: les symboles de fonctions (resp. de relations) sont interprétés par des fonctions (resp. des relations), définies sur des puissances cartésiennes de S , d'arités adéquates.

La notion de *satisfaction* relie ces deux aspects : si on se donne une $\mathcal{L}$ -structure S , et une formule ϕ dans le langage $\mathcal{L}$, on définit, par induction¹ sur la formule ϕ , la notion "la structure S satisfait la formule ϕ ", qu'on note $S \models \phi$. Par exemple, si A est un anneau, et qu'on note S la $\mathcal{L}_{ann}$ -structure correspondante, alors on a $S \models \forall x \forall y \forall z \ x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$.

Un *morphisme* de $\mathcal{L}$ -structures est une application qui préserve les relations et les fonctions. On a alors des notions naturelles d'isomorphismes, d'automorphismes de $\mathcal{L}$ -structures. Un *morphisme élémentaire*, ou *plongement élémentaire*, est un morphisme qui préserve la satisfaction de toutes les formules, pas uniquement des relations du langage. La structure d'arrivée est alors appelée *extension élémentaire* de celle de départ.

Non-exemple : Le $\mathcal{L}_{ann}$ -morphisme usuel de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ n'est pas élémentaire, puisque la formule $\phi(y) := \forall x (x \cdot x + y \neq 0)$ est satisfaite par l'élément 1 dans $\mathbb{R}$, mais pas par son image dans $\mathbb{C}$.

Si x est un uplet de variables, on note S^x l'ensemble des fonctions qui, à chaque variable apparaissant dans x , associent un élément de S .

On peut alors, pour toute $\mathcal{L}$ -formule du premier ordre $\phi(x, y)$, et pour tout élément b de S^y , décrire le *sous-ensemble* de S^x défini par la formule $\phi(x, b)$, comme étant l'en-

1. Si la formule ϕ a des variables non quantifiées, la satisfaction de ϕ équivaut à la satisfaction de la formule obtenue à partir de ϕ par adjonction de quantificateurs universels.

semble des éléments $a \in S^x$ tels que $S \models \phi(a, b)$. On note cet ensemble $\phi(S, b)$, ou, par abus, $\phi(S)$. On dit que c'est un *ensemble b -définissable*.

Les ensembles définis par la conjonction d'une infinité de formules sont dits *type-définissables* s'ils ne font intervenir qu'un nombre fini de variables, et *pro-définissables* sinon.

Remarque 2.1. Ici, $\phi(x, b)$ et $\phi(a, b)$ sont des *formules à paramètres*, obtenues par substitution formelle. Ce ne sont pas des $\mathcal{L}$ -formules, mais des formules dans un langage plus gros, qu'on note $\mathcal{L}_{ab}$, où on a ajouté des symboles de constante pour les coordonnées de a et b . La $\mathcal{L}$ -structure S est alors munie de l'interprétation naturelle de ces symboles de constantes.

Ce procédé d'enrichissement du langage $\mathcal{L}$, par ajout de paramètres provenant d'éléments des structures étudiées, est omniprésent. Cela permet, entre autres, de considérer les formules exprimant des égalités polynomiales dont les coefficients ne sont pas nécessairement des entiers, mais des éléments d'anneaux arbitraires.

Par exemple, si a est un élément d'un anneau A , vu comme $\mathcal{L}_{ann}$ -structure, l'ensemble des racines carrées de a est défini par la formule à paramètres $(x \cdot x) - a = 0$.

Définition 2.2. Théories et Modèles

Si on se donne une structure S dans un langage $\mathcal{L}$, on peut se demander à quoi ressemble l'ensemble des $\mathcal{L}$ -formules qui sont satisfaites par S . Cet ensemble est la *théorie* de S , notée $Th(S)$. On dit que deux $\mathcal{L}$ -structures S_1 et S_2 sont élémentairement équivalentes, ce qu'on note $S_1 \equiv S_2$, si $Th(S_1) = Th(S_2)$.

Inversement, si on fixe un ensemble T de $\mathcal{L}$ -formules (sans variables libres), on peut considérer la classe des $\mathcal{L}$ -structures M qui satisfont toutes les formules de T . Ces structures sont appelées *modèles* de la théorie T , et on note alors $M \models T$. Si T, T' sont deux théories, on dit que T' est une extension de T si $T \subseteq T'$.

On dit qu'une théorie T est *cohérente* si elle a au moins un modèle. Si T est cohérente, on dit qu'elle est *complète* si, pour tous $M, N \models T$, on a l'égalité $Th(M) = Th(N)$.

Dans le langage $\mathcal{L}_{ann}$, la théorie ACF des corps algébriquement clos n'est pas complète, puisque deux corps algébriquement clos peuvent avoir des caractéristiques différentes.

Il est fréquent, et commode, d'étudier une structure en travaillant dans une extension élémentaire suffisamment grosse de celle-ci.

Définition 2.3. Imaginaires

On dit qu'une théorie T *élimine les imaginaires* si, pour toute relation d'équivalence E définissable (avec paramètres) dans un modèle M de T , il existe une fonction f définissable dans M (avec paramètres) telle que, pour tous $x, y \in M$, on ait $M \models f(x) = f(y)$ si et seulement si $M \models xEy$. Ainsi, T élimine les imaginaires si la surjection canonique associée à une relation d'équivalence définissable est toujours définissable.

Si T est une théorie dans un langage $\mathcal{L}$, on peut construire de manière naturelle une théorie $T^{eq} \supseteq T$ dans un langage $\mathcal{L}^{eq} \supseteq \mathcal{L}$ telle que T^{eq} élimine les imaginaires. Alors, T^{eq} est complète si et seulement si T l'est, et les modèles de T induisent de manière unique des modèles de T^{eq} .

2.2 Espaces de types, compacité

Pour cette sous-section, sauf mention contraire, $\mathcal{L}$ est un langage quelconque.

Définition 2.4. Soit $A \subseteq M$, où M est une $\mathcal{L}$ -structure. Soit x un uplet de variables, *possiblement infini*.

1. Un type partiel en le uplet de variables x , à paramètres dans A , est un ensemble de formules à paramètres dans A dont les variables libres sont incluses dans x .
2. Un type partiel π est dit cohérent si, pour toute famille finie de formules de π , il existe un uplet dans M satisfaisant, au sens de la structure M , la conjonction de ces formules. Si π et ρ sont deux types partiels, on note $\pi \models \rho$ si tout élément satisfaisant π (dans une extension élémentaire de M) satisfait ρ .
3. Un type partiel sur A est dit complet s'il est cohérent et maximal pour l'inclusion parmi les types partiels sur A qui sont cohérents.
4. On note $S_x^M(A)$, ou, s'il n'y a pas d'ambiguïté², $S_x(A)$, l'ensemble des types complets sur A dans le uplet de variables x . Si $x = (x_1, \dots, x_n)$, où les x_i sont des variables deux à deux distinctes, on pourra noter $S_n(A)$ au lieu de $S_x(A)$.
5. Si $\alpha \in M^x$, on note $tp(\alpha/A)$ l'élément de $S_x^M(A)$ constitué des formules $\phi(x)$ à paramètres dans A telles que $M \models \phi(\alpha)$.
Si $p \in S_x^M(A)$, on dit que p est réalisé dans M s'il existe $\alpha \in M^x$ tel que $tp(\alpha/A) = p$.
Un tel α est appelé réalisation de p .

Par définition, deux uplets ont le même type sur A lorsqu'ils satisfont les mêmes formules à paramètres dans A . Informellement, ils sont alors "indistinguables sur A ".

On peut définir une topologie sur l'ensemble $S_x(A)$.

Définition 2.5. On fixe une $\mathcal{L}$ -structure M , un uplet de variables x , et $A \subseteq M$.

1. Soit $\phi(x)$ une formule à paramètres dans A . On note $[\phi]$ le sous-ensemble de $S_x(A)$ constitué de l'ensemble des $p \in S_x(A)$ tels que $\phi(x) \in p$.
2. On munit $S_x(A)$ de la topologie dont une base d'ouverts est donnée par les $[\phi]$, où ϕ est une formule en x à paramètres dans A . L'espace topologique ainsi obtenu est appelé *l'espace des types* sur A en la variable x .

Théorème 2.6. *Théorème de compacité*

Soit T une $\mathcal{L}$ -théorie. Alors T est cohérente si et seulement si toute sous-partie finie de T est cohérente.

Corollaire 2.7. *Soit M une $\mathcal{L}$ -structure. Alors :*

1. *Pour tout uplet de variables x , pour tout $A \subseteq M$, l'espace topologique $S_x^M(A)$ est compact.*

2. Le lecteur curieux se demande sans doute à quel point ces notions dépendent du choix de la structure M contenant l'ensemble A . Si N est une extension élémentaire de M , alors les deux notions de cohérence et de complétude coïncident, ce qui entraîne l'égalité $S_x^M(A) = S_x^N(A)$.

2. Il existe une extension élémentaire N de M telle que, pour tout $A \subseteq M$, pour tout n , tout type $p \in S_n^M(A) = S_n^N(A)$ est réalisé dans N .
3. Pour tous $A \subseteq B \subseteq M$, pour tout n , l'application de restriction $S_n^M(B) \rightarrow S_n^M(A)$ est continue et surjective.

Ainsi, un espace de types est un espace compact. De plus, par construction, les $[\phi]$ forment une base d'ouverts, et sont ouverts-fermés.

Pour comprendre une théorie, étudier les espaces de types pour les modèles de cette théorie est souvent utile. Reprenons l'exemple des corps algébriquement clos.

Théorème 2.8. *Théorème de Chevalley-Tarski ([Tar51])*

Soit $F \leq K$, où K est un corps algébriquement clos, vu comme $\mathcal{L}_{ann}$ -structure. Alors, pour tout n , l'ensemble $S_n^K(F)$ est en bijection avec l'ensemble des idéaux premiers de l'anneau de polynômes $F[x_1, \dots, x_n]$, via l'application $p \mapsto \{f \in F[x_1, \dots, x_n] \mid "f(x) = 0" \in p\}$.

Ce théorème est équivalent à l'énoncé suivant : si $F \leq K$, où K est un corps algébriquement clos vu comme $\mathcal{L}_{ann}$ -structure, alors les ensembles F -définissables dans K sont définissables avec des formules sans quantificateurs à paramètres dans F .

On dit alors que la théorie ACF des corps algébriquement clos *élimine les quantificateurs* dans le langage $\mathcal{L}_{ann}$. Nous verrons plus tard d'autres propriétés intéressantes de cette théorie.

2.3 Définissabilité et algébricité

Rappelons un énoncé d'algèbre commutative :

Proposition 2.9. *Si $F \leq K = K^{alg}$, et $\alpha \in K$, alors α a un nombre fini de conjugués sous l'action de $\text{Aut}(K/F)$ si et seulement s'il existe un polynôme non nul $P \in F[X]$ tel que $P(\alpha) = 0$.*

La notion d'algébricité en théorie des modèles généralise ces idées, en remplaçant les annulations de polynômes par des formules du premier ordre dans un langage donné.

Définition 2.10. Soit $A \subseteq M$, où M est une $\mathcal{L}$ -structure. Soit α un uplet fini dans M .

1. On dit que α est *algébrique* sur A (resp. *définissable* sur A) s'il existe une formule $\phi(x)$ à paramètres dans A telle que $M \models \phi(\alpha)$ et $\phi(M)$ est fini (resp. $\phi(M) = \{\alpha\}$).
2. La clôture algébrique (resp. clôture définissable) de A est l'ensemble des uplets d'éléments de M qui sont algébriques (resp. définissables) sur A . On la note $acl^M(A)$ ou $acl(A)$ (resp. $dcl^M(A)$ ou $dcl(A)$).

La proposition qui suit est l'analogue de celle rappelée plus haut pour les corps algébriquement clos.

Proposition 2.11. *Soit $A \subseteq M$, où M est une $\mathcal{L}$ -structure qui réalise beaucoup de types³, et où $|A| < |M|$. Soit α un uplet fini d'éléments de M . Alors :*

1. Le uplet α a un nombre fini de conjugués sous l'action de $\text{Aut}(M/A)$ si et seulement s'il est algébrique sur A .
2. Le uplet α est fixé par tous les éléments de $\text{Aut}(M/A)$ si et seulement s'il est définissable sur A .

Exemple 2.12. Si $A \subseteq M$, où $M \models ACF$, alors la clôture algébrique, au sens défini ci-dessus, de A est égale à la clôture algébrique, au sens de la théorie des corps, du sous-corps de M engendré par A . De plus, la clôture définissable de A est égale à la perfection du sous-corps de M engendré par A .

3 Théorie de la stabilité

Les théories stables ont de bonnes propriétés combinatoires, ce qui a permis de développer des outils généraux pour les étudier.

3.1 Les théories stables

Définition 3.1. Soit T une théorie dans un langage $\mathcal{L}$.

Soit $\phi(x, y)$ une $\mathcal{L}$ -formule, possiblement avec paramètres. On dit que $\phi(x, y)$ a la *propriété de l'ordre* s'il existe, dans un modèle M de T contenant les paramètres de ϕ , des suites $(a_i)_{i \in \mathbb{N}}$ et $(b_j)_{j \in \mathbb{N}}$ telles que $M \models \phi(a_i, b_j)$ si et seulement si $i \leq j$.

On dit que T est *stable* si aucune formule n'a la propriété de l'ordre. On dira également qu'une $\mathcal{L}$ -structure est stable si sa théorie l'est.

Autrement dit, les théories stables sont celles où les ensembles définissables n'induisent pas de relations d'ordre à chaînes infinies.

On peut se demander pourquoi ce critère, traitant de relations d'ordre, est pertinent. Il se trouve que les théories stables sont également caractérisées par leurs bonnes propriétés.

Définition 3.2. Soit λ un cardinal. Une théorie T est λ -stable si, pour tout modèle M de T , pour tout $A \subseteq M$, si $|A| \leq \lambda$, alors $|S_n^M(A)| \leq \lambda$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Définition 3.3. Soit $A \subseteq B \subseteq M$, où M est une $\mathcal{L}$ -structure. Soit $p \in S_x^M(B)$.

On dit que le type p est *définissable* sur A si, pour toute formule sans paramètres $\phi(x, y)$, il existe une formule à paramètres dans A , dans la variable y , qu'on notera $d_p x \phi(x, y)$, telle que, pour tout $b \in B^y$, on ait $\phi(x, b) \in p$ si et seulement si $M \models d_p x \phi(x, b)$. Autrement dit, l'ensemble des éléments $b \in B^y$ tels que $\phi(x, b) \in p$ est l'intersection de B^y et d'un ensemble A -définissable.

On dit que p est définissable s'il est définissable sur B .

Théorème 3.4. Soit T une théorie cohérente. Les assertions suivantes sont équivalentes :

1. La théorie T est stable.

3. Plus précisément, il suffit de supposer que M est $|A|^+$ -saturée et $|A|^+$ -fortement homogène. Voir les définitions 5.2.7 et 6.1.5 de [TZ12].

2. La théorie T est λ -stable, pour un certain cardinal λ .
3. Pour tout modèle M de T , pour tout ensemble $A \subseteq M$, tout type complet sur A est définissable.

Ainsi, les théories stables sont celles où les espaces de types restent assez simples.

Corollaire 3.5. *La théorie ACF est λ -stable pour tout cardinal infini λ , donc est stable.*

Démonstration. Par le théorème 2.8, il s'agit de dénombrer les idéaux premiers dans un anneau de polynômes de la forme $F[x_1, \dots, x_n]$, où F est un corps de cardinal inférieur ou égal à λ . Par noethérianité, il y en a au plus $|F| + \aleph_0$, ce qui est plus petit que λ . $\square$

Remarque 3.6. Ce type de raisonnement est assez fréquent pour démontrer qu'une théorie est stable : on cherche à avoir une description des ensembles définissables, via un résultat d'élimination des quantificateurs. On utilise alors cette description pour compter des types, dans le but de démontrer la λ -stabilité pour un certain λ .

Remarque 3.7. La définissabilité des types dans la théorie ACF peut se démontrer en s'appuyant sur l'élimination des quantificateurs, ce qui donne une autre preuve de la stabilité de cette théorie. Par exemple, soit $K \models ACF$, $p \in S_x^K(K)$, et soit $I \subseteq K[x]$ l'idéal donné par le théorème 2.8. Alors, le type p est définissable sur tout corps $F \leq K$ tel que $I = K \cdot (I \cap F[X])$.

En effet, soit F un tel corps, et fixons $f_1, \dots, f_n \in F[X]$ des générateurs de $I \cap F[X]$. Par élimination des quantificateurs, il suffit de trouver des définitions pour les formules $P(x, y) = 0$, où P est un polynôme à coefficients entiers, et y un uplet de variables.

Pour tout $b \in K^y$, la formule $P(x, b) = 0$ est dans le type $p(x)$ si et seulement si le polynôme $P(X, b)$ appartient à l'idéal I . Or, par hypothèse sur le corps F , cela revient à demander qu'il existe des polynômes $g_1, \dots, g_n$ dans $K[X]$ tels que $P(X, b) = \sum_i g_i \cdot f_i$. De plus, on peut borner le degré de $P(X, b)$ indépendamment de b . Par un argument d'algèbre linéaire en dimension finie, on peut alors se restreindre à chercher des polynômes g_i de degrés bornés par une constante indépendante de b . La condition sur le uplet b s'exprime donc via une formule définissable à paramètres dans F (en quantifiant sur les coefficients des g_i).

Définition 3.8. Indépendance

Soit T une théorie stable, M un modèle de T , N une extension élémentaire de M et a, b des uplets finis dans N . On dit que a est indépendant de b au-dessus de M , ce qu'on note $a \downarrow_M b$, si le type $tp(a/Mb)$ est définissable sur M . Ici, le uplet b peut être vu comme l'ensemble de ses coordonnées, et Mb est alors une abréviation pour $M \cup b$.

Plus généralement⁵, si T est une théorie, non nécessairement stable, si $A, B, C \subseteq N$, où $N \models T$, on peut définir une notion " A est indépendant de B au-dessus de C ", qu'on note encore $A \downarrow_C B$. Si C est fixé, cette notion ne dépend que des types $tp(ab/C)$, pour a, b uplets finis d'éléments de A et B respectivement.

5. La notion de "déviante" est contenue dans les définitions 7.1.2, 7.1.7 et 7.2.8 de [TZ12]. Le cas particulier de l'indépendance au sens de la déviante dans les théories ω -stables est présenté dans [Mar02], Définition 6.3.1.

Dans le cas des corps algébriquement clos, vus comme $\mathcal{L}_{ann}$ -structures, cette notion d'indépendance est équivalente à l'indépendance algébrique.

Quand la théorie est stable, cette notion d'indépendance se comporte bien, par exemple : $AB \downarrow_C D$ si et seulement si $A \downarrow_C D$ et $B \downarrow_{AC} D$, ou encore : $A \downarrow_C B$ si et seulement si $B \downarrow_C A$. On peut alors faire du calcul en manipulant ces propriétés formelles.

3.2 Structures algébriques définissables

Pour étudier une théorie donnée, il peut être utile de comprendre les structures algébriques, notamment les groupes, qui y sont définissables. En effet, ces derniers peuvent apparaître dans des contextes qui ne relèvent pas a priori de l'algèbre. Le théorème 3.14 est un avatar de ce genre de phénomène.

Définition 3.9. Une structure algébrique (groupe, anneau, etc.) est dite (type) définissable dans une $\mathcal{L}$ -structure S si les graphes des opérations de la structure sont des sous-ensembles de puissances cartésiennes de S qui sont (type) définissables par des $\mathcal{L}$ -formules à paramètres dans S . Par exemple, le corps $\mathbb{C}$ des nombres complexes est définissable dans la $\mathcal{L}_{ann}$ -structure associée au corps $\mathbb{R}$, en utilisant comme ensemble sous-jacent le produit cartésien $\mathbb{R}^2$, et en définissant les opérations d'anneau via les formules usuelles. En revanche, le corps des réels n'est pas définissable dans le corps $\mathbb{C}$. En effet, par le corollaire 3.5, il n'y a pas de relations d'ordres totales infinies définissables dans la structure $\mathbb{C}$, alors qu'il y en a une dans $\mathbb{R}$.

Plus généralement, on peut définir la notion de $\mathcal{L}_1$ -structure définissable dans une $\mathcal{L}_2$ -structure, si $\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2$ sont des langages arbitraires.

Définition 3.10. Un *groupe stable* est un groupe qui est type-définissable dans un modèle suffisamment gros d'une théorie stable.

Soit G un groupe type-définissable dans une structure M suffisamment grosse, non nécessairement stable. Soit $A \subseteq B \subseteq M$, où A contient les paramètres définissant G . Soit $p \in S_x(B)$ tel que $p(x) \models x \in G$. Le type p est dit *générique*, pour G , au-dessus de A , s'il est définissable sur A et si, pour toute formule sans paramètres $\phi(x, y)$, la relation d'équivalence définissable E_ϕ n'a qu'un nombre fini de classes rencontrant $G(M)$, où E_ϕ est définie par la formule $E_\phi(a, b) := \forall y [d_p x \phi(a \cdot x, y) \leftrightarrow d_p x \phi(b \cdot x, y)]$.

Un élément $a \in G$ est générique sur A si $tp(a/A)$ l'est. Si G est stable et définissable, a est générique sur A lorsqu'il n'appartient à aucun sous-groupe A -définissable d'indice infini.⁶

Le théorème suivant, dû à Macintyre ([Mac71]), est une réciproque du corollaire 3.5.

Théorème 3.11. (*Macintyre*)

Soit K un corps infini définissable dans une théorie ω -stable. Alors K est un corps algébriquement clos.

6. Pour le cas des groupes stables définissables, une définition équivalente de la genericité est donnée dans [Poi01], au début de la section 5.1. Les propriétés des génériques y sont ensuite étudiées.

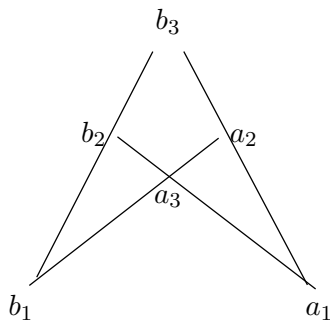
La preuve de ce théorème repose des propriétés abstraites des types génériques, appliquées aux groupes additif et multiplicatif du corps K . D'autres théorèmes plus ou moins similaires sont dans [Poi01] (Théorèmes 4.15, 6.11). Ces résultats montrent que les corps algébriquement clos peuvent être identifiés via des propriétés modèle-théoriques, par exemple l' ω -stabilité. Cependant, une conjecture portant sur une caractérisation des groupes algébriques sur des corps algébriquement clos est encore ouverte (voir les parties de l'introduction et du postscript de [Poi01] traitant de la "conjecture de Cherlin").

Les notions de généricité et d'indépendance nous permettent de parler de configurations de groupe, utiles pour étudier les groupes définissables.

Définition 3.12. Soit $A \subseteq M$, où M est une $\mathcal{L}$ -structure.

Un quadrangle algébrique sur A , ou *configuration de groupe* sur A , est un uplet $(a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3)$ d'éléments satisfaisant les propriétés suivantes :

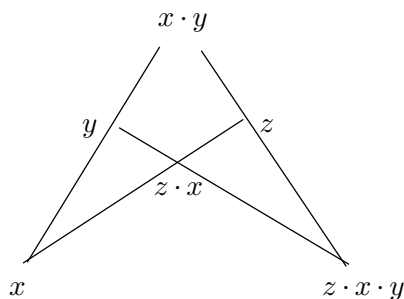
1. Si x, y, z correspondent à trois points colinéaires sur le diagramme ci-dessous, alors x est dans la clôture algébrique de Ayz .
2. Si x, y, z correspondent à trois points non colinéaires, alors le triplet (x, y, z) est une famille indépendante sur A .



Deux configurations de groupe $(a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3), (a'_1, a'_2, a'_3, b'_1, b'_2, b'_3)$ sur A sont dites *équivalentes* si, pour tout i , on a $\text{acl}(Aa_i) = \text{acl}(Aa'_i)$ et $\text{acl}(Ab_i) = \text{acl}(Ab'_i)$.

Si l'on dispose de trois points génériques d'un groupe stable qui sont indépendants, on peut construire une configuration de groupe :

Proposition 3.13. Soit G un groupe stable. Si x, y, z sont des éléments de G qui sont indépendants sur A et génériques sur A , alors le diagramme suivant est une configuration de groupe sur A .



Le théorème de configuration de groupe de Hrushovski ([Hru86]), énoncé ci-dessous, explique que ces exemples sont les seuls, et qu'on peut essentiellement reconstruire le groupe G d'origine à partir d'une configuration. La preuve s'appuie sur le théorème de "group chunk" de Weil-Hrushovski, qui construit un groupe à partir d'une loi de composition définie génériquement.

Théorème 3.14. *Soit $(a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3)$ une configuration de groupe dans une théorie stable T . Alors, il existe un groupe G type-définissable dans T et trois points génériques indépendants $x, y, z \in G$ tels que la configuration de groupe construite à partir de (x, y, z) est équivalente à la configuration $(a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3)$. De plus, un tel groupe G est essentiellement unique.*

4 Théories instables, Métastabilité

La théorie des modèles moderne ne se restreint pas à la théorie de la stabilité : des structures instables intéressantes existent, et leur étude a amené à développer de nouveaux outils.

4.1 Des exemples de structures instables : les corps valués

Définition 4.1. Un corps valué est un corps K muni d'une valuation, ou norme, $v : K \rightarrow \Gamma$, où $\Gamma = \Gamma^\times \sqcup \{0\}$ est un monoïde commutatif ordonné, noté multiplicativement, satisfaisant les conditions suivantes :

1. La fonction v est surjective, i.e. $v(K) = \Gamma$.
2. $\Gamma^\times$ est un groupe abélien ordonné, l'élément 0 est strictement inférieur à tous les éléments de $\Gamma^\times$ et $0 \cdot \gamma = 0$ pour tout $\gamma \in \Gamma$.
3. On a $v(1) = 1$ et, pour tout $x \in K$, $v(x) = 0$ si et seulement si $x = 0$.
4. Pour tous $x, y \in K$, on a $v(xy) = v(x) \cdot v(y)$.
5. Pour tous $x, y \in K$, on a l'inégalité ultramétrique : $v(x + y) \leq \max(v(x), v(y))$.

Pour étudier certaines structures, comme les corps valués, ou pour des raisons techniques, il est commode d'élargir le cadre donné dans la sous-section 2.1, en autorisant les langages et les structures à avoir plusieurs *sortes* différentes. Alors, chaque variable, relation et fonction doit être munie d'une spécification des sortes auxquelles elle s'applique. De même, les structures sont données par des familles d'ensembles disjoints (un ensemble pour chaque sorte du langage), sur lesquels sont interprétés les symboles du langage.

Définition 4.2. Soit (K, Γ, v) un corps valué.

1. L'anneau de valuation de K est $\mathcal{O}_K := \{x \in K \mid v(x) \leq 1\}$ (c'est la boule fermée centrée en 0 de rayon 1). Son unique idéal maximal est $\mathfrak{m}_K := \{x \in K \mid v(x) < 1\}$. On définit alors le corps résiduel, noté K_v , comme le quotient $K_v := \mathcal{O}_K / \mathfrak{m}_K$. On note $res : \mathcal{O}_K \rightarrow K_v$ le morphisme de passage au quotient.

2. Soit $\mathcal{L}_{K_v, \Gamma}$ le langage à trois sortes défini de la manière suivante :

On part de sortes K, K_v, Γ , où K et K_v sont munies (de copies) du langage des anneaux, et Γ est munie du langage des groupes ordonnés $\mathcal{L}_{go} := \{1, \cdot, \cdot^{-1}, <\}$. On ajoute alors des symboles de fonctions $\rho : K \times K \rightarrow K_v$ et $v : K \rightarrow \Gamma$.

On peut alors faire de (K, Γ, v) une $\mathcal{L}_{K_v, \Gamma}$ -structure. Les trois sortes sont interprétées de manière tautologique (avec la convention $0^{-1} = 0$ dans Γ), de même que la fonction $v : K \rightarrow \Gamma$. La fonction $\rho : K \times K \rightarrow K_v$ est interprétée comme suit : $\rho(x, y) := \text{res}(\frac{x}{y})$ si $\text{res}(\frac{x}{y})$ est bien défini, et $\rho(x, y) := 0$ sinon.

3. On note VF la $\mathcal{L}_{K_v, \Gamma}$ -théorie des corps valués, et $ACVF$ la $\mathcal{L}_{K_v, \Gamma}$ -théorie des corps valués algébriquement clos dont la valuation n'est pas triviale.

Théorème 4.3. (*Robinson, 1956*)

La théorie $ACVF$ élimine les quantificateurs dans le langage $\mathcal{L}_{K_v, \Gamma}$.

Corollaire 4.4. *Si $(K, v) \models ACVF$, alors les sous-ensembles définissables des K_v^n (resp. des $(\Gamma^\times)^n$), pour $n \in \mathbb{N}$, sont définissables sans quantificateurs dans le langage des anneaux, avec des paramètres dans K_v (resp. dans le langage des groupes ordonnés, avec des paramètres dans $\Gamma^\times$).*

La sorte K_v est alors un modèle de ACF , et l'ensemble définissable $\Gamma^\times$ est un groupe abélien ordonné divisible. D'autre part, les sous-ensembles définissables de K sont des combinaisons booléennes finies de boules (ouvertes ou fermées).

Ainsi, un corps valué algébriquement clos combine deux structures distinctes : un corps algébriquement clos K_v vu comme $\mathcal{L}_{ann}$ -structure, et un groupe abélien ordonné divisible $\Gamma^\times$. La première est une structure stable, mais la deuxième ne l'est pas, puisqu'elle contient une relation d'ordre totale. Par conséquent, les outils de la théorie de la stabilité ne peuvent pas être appliqués tels quels dans $ACVF$.

Enfin, ce corollaire montre que l'étude des types dans $ACVF$ fait intervenir des notions topologiques.

Définition 4.5. Soit (L, v) un corps valué, et $A \subseteq L$. Un *filtre pseudo-Cauchy* $\mathcal{F}$ sur A est une collection de boules (ouvertes ou fermées) dont les centres sont dans A , et les rayons dans $v(A)$, telle que toute intersection finie d'éléments de $\mathcal{F}$ a un point dans L .

Le corps valué (L, v) est dit *sphériquement complet* si pour tout filtre pseudo-Cauchy $\mathcal{F}$ sur L , il existe x dans L qui appartient à toutes les boules de $\mathcal{F}$.

Le dernier point du corollaire 4.4 est équivalent au fait suivant : si $M \models ACVF$ et N est une extension élémentaire de M , si $a \in K(N)$, alors le type $tp(a/M)$ est déterminé par le filtre pseudo-Cauchy sur $K(M)$ défini par a .

4.2 Domination stable et métastabilité

L'exemple des corps valués algébriquement clos montre qu'une structure instable peut contenir des structures stables intéressantes. On peut alors, pour une théorie T donnée, chercher à définir la "partie stable" de T , i.e. une structure $St(T)$ qui serait définissable

dans les modèles de T , stable pour la structure induite par les ensembles définissables dans T , et maximale pour cette propriété. Si la partie stable contrôle suffisamment bien le comportement de T , les outils de la théorie de la stabilité peuvent alors être adaptés.

Le concept de métastabilité vise à donner un sens précis à cette idée de “contrôle par la partie stable”. Avant de pouvoir l’aborder, et de montrer que la théorie $ACVF$ est métastable, il faut définir plusieurs notions importantes.

Pour la suite, si T est une théorie cohérente, on travaillera dans la théorie T^{eq} , afin de garantir la propriété d’élimination des imaginaires. Si elle est complète, on fixe un modèle $\mathbb{U}$ de T^{eq} , qu’on suppose suffisamment gros ⁷.

Définition 4.6. Ensembles stablement plongés

Soit T une théorie complète. Soit X un ensemble définissable dans $\mathbb{U}$.

1. L’ensemble X est *stablement plongé* si, pour tout entier n , pour tout $Y \subseteq X^n$, si Y est définissable avec des paramètres dans $\mathbb{U}$, alors Y est définissable avec des paramètres dans X .
2. L’ensemble X est *stable, stablement plongé* s’il est stablement plongé et si la structure induite sur X par les ensembles définissables dans $\mathbb{U}$ est stable.

Cela revient à demander qu’aucune formule à paramètres dans $\mathbb{U}$ de la forme $\phi(x, y)$ et vérifiant $\mathbb{U} \models \phi(x, y) \rightarrow x \in X^x$, n’a la propriété de l’ordre.

Exemple 4.7. Dans un corps valué algébriquement clos (K, Γ, v) , le groupe de valeurs $\Gamma^\times$ est stablement plongé, et le corps résiduel K_v est stable, stablement plongé. Cela découle du corollaire 4.4 ci-dessus⁸.

Les ensembles stables, stablement plongés vont constituer les fragments de la “partie stable” que l’on cherche à définir.

Définition 4.8. Soit T une théorie complète, et $C \subset \mathbb{U}$. La *partie stable au-dessus de C* , notée St_C , est la structure à plusieurs sortes définie de la manière suivante :

1. Les sortes de St_C sont les ensembles C -définissables dans $\mathbb{U}$ qui sont stables, stablement plongés.
2. Pour chaque ensemble C -définissable dans $\mathbb{U}$ qui est inclus dans un produit d’ensembles stables stablement plongés C -définissables, on ajoute un symbole de relation, sur le produit de sortes de St_C qui correspond, qu’on interprète de manière tautologique.

On peut également voir St_C comme un ensemble pro- C -définissable⁹ dans $\mathbb{U}$.

Si $a \in \mathbb{U}$, on définit $St_C(a) \subseteq St_C$ comme étant l’ensemble des éléments de St_C qui sont définissables, dans $\mathbb{U}$, sur aC . Autrement dit, $St_C(a) = dcl^{\mathbb{U}}(aC) \cap St_C$.

7. Voir les notions de κ -saturation et de κ -homogénéité forte dans les définitions 5.2.7 et 6.1.5 de [TZ12].

8. Le passage de T à T^{eq} préserve les notions de la définition 4.6.

9. On rappelle qu’un ensemble pro-définissable est un ensemble définissable en une infinité de variables avec une infinité de formules. Pour plus de détails, voir [HR18], début de la section 2.

La proposition suivante nous assure qu'on a bien construit une “partie stable”.

Proposition 4.9. *Pour tout C , toute union finie de sortes de St_C est stable, stablement plongée dans $\mathbb{U}$. Par conséquent, la structure St_C est stable.*

Une fois les parties stables définies, il s'agit de comprendre leur influence sur la théorie. Commençons par définir la classe des types qui sont “contrôlés” par leur partie stable.

Définition 4.10. Types stablement dominés. Soit $a, C \subset \mathbb{U}$.

1. On dit que $tp(a/C)$ est *stablement dominé* si, pour tout uplet $b \in \mathbb{U}$ tel que $St_C(b) \downarrow_C St_C(a)$, on a $tp(b/CSt_C(a)) \models tp(b/Ca)$.
2. Si $f : X \rightarrow St_C$ est une fonction C -définissable, où X est pro- C -définissable et $a \in X$, on dit que $tp(a/C)$ est *stablement dominé par f* si, pour tout uplet $b \in \mathbb{U}$ tel que $St_C(b) \downarrow_C f(a)$, on a $tp(b/Cf(a)) \models tp(b/Ca)$.

Remarque 4.11. 1. Le type $tp(a/C)$ est stablement dominé si et seulement s'il est stablement dominé par une fonction C -définissable f , si et seulement s'il est stablement dominé par une fonction C -définissable θ telle que $\theta(a)$ énumère $St_C(a)$.
2. Les conditions d'indépendance $St_C(b) \downarrow_C St_C(a)$ et $St_C(b) \downarrow_C f(a)$ se lisent de manière équivalente dans la structure $\mathbb{U}$ et dans la structure *stable* St_C .

Les types stablement dominés ont de bonnes propriétés, indépendamment de la théorie ambiante. Cela donne une importance particulière aux groupes ayant un type générique stablement dominé, qui sont appelés *groupes stablement dominés*. Les deux résultats qui suivent illustrent les bonnes propriétés de ces groupes.

Théorème 4.12. *Théorème de configuration de groupe*¹⁰

Soit $(a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3)$ une configuration de groupe dans une théorie T quelconque, telle que le type du uplet $(a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3)$ est stablement dominé. Alors, les conclusions du théorème de configuration de groupe sont satisfaites, et le groupe ainsi construit est stablement dominé.

Proposition 4.13. *Soit G un groupe pro-définissable stablement dominé. Alors, il existe un groupe stable $\mathfrak{g}$, pro-définissable dans St_C pour un certain C , et une fonction définissable $f : G \rightarrow \mathfrak{g}$ qui est un morphisme de groupes, tels que les types génériques de G sont stablement dominés par f .*

Après ce petit détour par les propriétés des types stablement dominés, nous définissons les théories métastables comme celles où ces types sont suffisamment présents.

Définition 4.14. Théories métastables

Soit T une théorie, Γ un ensemble définissable sans paramètres dans T . Si $a, C \subseteq M$, où M est un modèle de T , on note $\Gamma_C(a) := \Gamma \cap dcl^M(aC)$. Si T est une théorie complète, et Γ est définissable sans paramètres et stablement plongé, on dit que T est *métastable au-dessus de Γ* si, pour tout $C \subset \mathbb{U}$, il existe $D \supseteq C$ tel que, pour tout $a \in \mathbb{U}$, le type $tp(a/D\Gamma_D(a))$ est stablement dominé. Un tel D est appelé *base de métastabilité*. Si T est cohérente, elle est métastable au-dessus de Γ si toutes ses extensions complètes le sont.

10. Le sujet de mon mémoire de master 2 était la démonstration d'une variante de ce théorème.

Comme dit plus haut, les définitions sont motivées par l'exemple d'ACVF :

Théorème 4.15. [HHM08](Théorème 12.18)

La théorie ACVF est métastable au-dessus du groupe de valeurs $\Gamma^\times$. Les corps algébriquement clos sphériquement complets sont des bases de métastabilité.

Les outils de la métastabilité permettent alors d'obtenir, par exemple :

Théorème 4.16. [HR18](Théorème 6.23)

Tout corps infini définissable dans $ACVF^{eq}$ est définissablement isomorphe au corps valué K ou au corps résiduel K_v .

Ce théorème repose, entre autres, sur l'étude des groupes abéliens pro-définissables dans une théorie métastable, et utilise des hypothèses de finitude de certaines dimensions, vraies dans $ACVF$. Une question ouverte est celle de l'adaptation de ces résultats à des théories métastables où les dimensions sont infinies, comme par exemple la théorie des corps valués différentiellement clos de [Sca00] (Section 5). C'est vers ce type de problème que je pense me diriger.

Références

- [HHM08] D. HASKELL, E. HRUSHOVSKI et D. MACPHERSON. *Stable Domination and Independence in Algebraically Closed Valued Fields*. Lect. Notes Log., Assoc. Symb. Log. ; Cambridge University Press, 2008.
- [HR18] E. HRUSHOVSKI et S. RIDEAU. « Valued Fields, Metastable Groups ». In : *arxiv : 1709.08801* (2018).
- [Hru86] E. HRUSHOVSKI. « Contributions to Stable Model Theory ». In : *PhD Thesis, University of California at Berkeley* (1986).
- [Mac71] A. MACINTYRE. « On ω_1 -categorical theories of fields ». In : *Fund. Math.* (71 1971), p. 1-25.
- [Mar02] David MARKER. *Model Theory : An Introduction*. Springer, 2002.
- [Mor65] M. MORLEY. « Categoricity in power ». In : *Transactions of the American Mathematical Society* (1965).
- [Poi01] Bruno POIZAT. *Stable groups*. American Mathematical Society, 2001.
- [Sca00] T. SCANLON. « A model complete theory of valued D-fields ». In : *The Journal of Symbolic Logic* 65 (2000), p. 1758-1784.
- [She71] S. SHELAH. « Stability, the f.c.p. and superstability ». In : *Ann. Math. Logic* 3 (1971), p. 271-362.
- [Tar51] A. TARSKI. « A Decision Method for Elementary Algebra and Geometry (2nd ed.) » In : *Univ. Calif. Press, Berkeley* (1951).
- [TZ12] Katrin TENT et Martin ZIEGLER. *A Course In Model Theory*. Cambridge University Press, 2012.

Paul WANG