Silvain Rideau
Bureau T5

silvain.rideau@ens.fr
www.eleves.ens.fr/home/srideau

TD de Logique 1

26 et 29 septembre 2014

Les exercices qui ne sont pas abordés en cours, seront (certainement) corrigés sur ma page personelle (voir ci-dessus).

Exercice 1 (Bons ordres et chaînes descendantes) **:**
Soit $(X, <)$ un ensemble ordonné. Montrer les propriétés suivantes :

1. $(X, <)$ est bien-fondé si et seulement s'il n'existe pas de suite infinie strictement décroissante d'éléments de X.
2. $(X, <)$ est un bon ordre si et seulement si toute partie non vide de X contient un plus petit élément.

Exercice 2 (Calculs de cardinalités) **:**

1. Déterminer si les ensembles suivants sont dénombrables (c'est à dire en bijection avec $\mathbb{N}$) ou indénombrables.
   a) L'ensemble $\mathbb{N}^2$,
   b) l'ensemble $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ des suites d'entiers,
   c) l'ensemble des suites de rationnels qui convergent vers 0 (on pourra utiliser des suites de la forme $(\epsilon_n 2^{-n})_{n\in\mathbb{N}}$, avec $\epsilon_n = 0$ ou 1 pour tout n),
   d) l'ensemble des suites de rationnels qui sont constantes à partir d'un certain rang.
2. Montrer que $\mathbb{R}$ et $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ sont équipotents.

Exercice 3 (Bons ordres et anti-bons ordres) **:**
On suppose que $(X, <)$ est un bon ordre et que $(X, >)$ est également un bon ordre. Montrer que X est fini.

Exercice 4 (Plongements de bons ordres) **:**
Un plongement d'un ensemble ordonné $(X, <)$ dans un autre $(Y, <)$ est une application (injective) $f : X \to Y$ telle que $f(x) < f(x')$ ssi $x < x'$ pour tout $x, x' \in X$.

1. Montrer que tout bon ordre dénombrable ou fini se plonge dans $(\mathbb{Q}, <)$.
2. Quels sont les bons ordres qui admettent un plongement dans $(\mathbb{R}, <)$?

Exercice 5 (Axiomes du choix) **:**
On considère les trois énoncés suivants :

(AC) : tout produit d'ensembles non vides est non vide

(ACD) : si $\mathcal{R}$ est une partie de $X \times X$ telle que, pour tout $x \in X$, il existe $y \in X$ tel que $(x, y) \in \mathcal{R}$, alors il existe une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de X vérifiant $(x_n, x_{n+1}) \in \mathcal{R}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ dont on peut choisir le premier élément.

(ACden) : tout produit dénombrable d'ensembles non vides est non vide

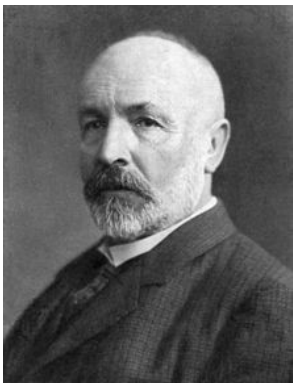
(AC) est appelé *axiome du choix*, (ACD) est appelé *axiome des choix dépendants* et (ACden) est appelé *axiome du choix dénombrable*.

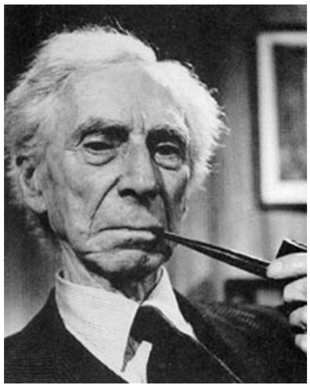
1. Montrer que (ACD) implique (ACden).
2. Une fonction de choix pour un ensemble X est une fonction $f : \mathfrak{P}(X) \setminus \{\varnothing\} \to X$ telle que pour tout $x \in \mathfrak{P}(X) \setminus \{\varnothing\}$, $f(x) \in x$. Montrer que (AC) est équivalent à l'assertion que tout ensemble admet une fonction de choix.
3. Montrer que (AC) est équivalent au fait que toute surjection admet une section, i.e. pour toute surjection $g : X \to Y$ il existe $h : Y \to X$ telle que $g \circ h$ est l'identité sur Y.
4. Montrer que (AC) implique (ACD).
5. Montrer que toute réunion dénombrable d'ensembles dénombrables est dénombrable.

Exercice 6 (Finitude de Dedekind) **:**
Sauf dans les dernières questions, tous ces résultats se démontrent sans axiome du choix.

1. Soit X un ensemble, montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes :
   a) X contient un sous-ensemble dénombrable.
   b) Pour tout ensemble Y au plus dénombrable, $X \cup Y$ est équipotent à X.
   c) X est en bijection avec une partie propre de X (on parle dit alors que X est infini au sens de Dedkind, ou D-infini).
2. Montrer que tout ensemble fini est D-fini (i.e. n'est pas D-infini).
3. Montrer que l'union et le produit de deux ensembles D-finis sont D-finis.
4. Montrer que la réunion disjointe d'une famille D-finie d'ensemble D-finis est D-finie.
5. Montrer pour tout ensemble infini X, $\mathcal{P}(\mathcal{P}(X))$ est D-infini.
6. Montrer, en utilisant (ACden) que pour tout ensemble X, $\mathbb{N}$ est subpotent à X si et seulement si tout ensemble fini est subpotent à X.
7. En déduire que si on admet (ACden), un ensemble est infini si et seulement si il est D-infini.

Exercice 7 (Qui sont ces charmants messieurs ?[1]) **:**





[1] Je remercie N. Curien pour cette excellente idée.