Silvain Rideau
Bureau T5

silvain.rideau@ens.fr
www.eleves.ens.fr/home/srideau

Corrigé du TD de Logique 1

26 et 29 septembre 2014

Exercice 3 (Bons ordres et anti-bons ordres) **:**
Supposons que $(X,<)$ soit un bon ordre infini. On construit par récurrence une suite infinie strictement croissante de X en choisissant $x_0 = \min X$ et $x_{i+1} = \min(X \setminus \{x_j : j \leqslant i\})$. On montre ainsi que $(X,>)$ n'est pas un bon ordre.

Exercice 5 (Axiomes du choix) **:**

4. Soit f une fonction de choix sur X. On définit la suite suivante par récurrence, $x_{n+1} = f(\{y : (x,y) \in \mathcal{R}\})$. Cette suite a évidemment les propriétés requises.

5. On peut injecter $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} X_i$ dans $\bigsqcup_{n\in\mathbb{N}} X_i$ en envoyant chaque $x \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}} X_i$ sur $(x, \min\{n : x \in X_n\})$. Par axiome du choix dénombrable, on trouve $(f_i)_{i\in\mathbb{N}}$ une bijection entre X_i et $\mathbb{N}$. On peut alors construire une bijection entre $\bigsqcup_{n\in\mathbb{N}} X_i$ et $\mathbb{N}^2$ (qui est dénombrable) en envoyant (x,i) sur $(f_i(x), i)$.

Exercice 6 (Finitude de Dedekind) **:**

1. (a) ⇒ (b) Soit X' une partie dénombrable de X. $X \cup Y = X \cup (X' \cup Y)$. Comme $X' \cup Y$ est dénombrable, on a $f : X' \simeq X' \cup Y$. Soit $g : X \cup Y \to X$ qui a $x \in X' \cup Y$ associe $f(x)$ et à $x \in X \setminus X'$ associe x. Il est évident que c'est un isomorphisme.

   (b) ⇒ (c) Soit Y un singleton disjoint de X et $f : X \cup Y \simeq X$, alors la restriction de f à X est injective mais non surjective.

   (c) ⇒ (a) Soit $f : X \to X$ injective non surjective. Soit $x_0 \notin f(X)$ et $x_n = f^n(x_0)$. Si $f^m(x_0) = f^n(x_0)$ pour $n \leqslant m$, par injectivité de f, on a donc $f^{m-n}(x_0) = x_0$ ce qui n'est possible que si $m = n$. Ainsi x_n définit bien une injection de $\mathbb{N}$ dans X.

2. Montrons par récurrence sur n qu'il n'existe pas de bijection de $\{0,\dots,n-1\}$ dans une partie propre de celui-ci. Soit f une telle bijection. Comme f n'est pas surjective, on peut supposer que $n-1$ n'est pas dans l'image, quitte à composer par une permutation. On considère alors la restriction de f à l'ensemble $\{0,\dots,n-2\}$. Si elle n'est pas surjective, cela contredit l'hypothèse de récurrence. Si elle est surjective, on a nécessairement $f(n-1) = n-1$, ce qui est absurde.

3. Soient X et Y deux ensembles D-finis. Soit $A \subseteq X \cup Y$ (et a_n une bijection de $\mathbb{N}$ dans A), alors, comme A est la réunion de ces deux ensembles, $A \cap X$ ou $A \cap Y$ est infini. Supposons que ce soit $A \cap X$. On peut alors injecter $\mathbb{N}$ dans $A \cap X$, en posant $i_{n+1} = \min\{i \in \mathbb{N} : a_i \in (A \cap X) \setminus \{a_{i_0}, \dots, a_{i_n}\}\}$. La fonction $n \mapsto a_{i_n}$ est alors une injection de $\mathbb{N}$ dans X, ce qui contredit la D-finitude de X.

   De même, s'il existe $A \subseteq X \times Y$ dénombrable, alors $\pi_1(A)$ ou $\pi_2(A)$ est infini (car le produit de deux ensembles finis est fini). Supposons que ce soit $\pi_1(A)$. On peut alors injecter $\mathbb{N}$ dans $\pi_1(A)$ en posant $i_{n+1} = \min\{i \in \mathbb{N} : a_i \in A \setminus \bigcup_{i=0}^{n} \pi_1^{-1}(x_i)\}$ et $x_{n+1} = \pi_1(a_{i_{n+1}})$, ce qui est absurde.

4. Soit I un ensemble D-fini, et pour $i \in I$, soit X_i un ensemble D-fini. Soit $A \subset \bigsqcup_{i\in I} X_i$ un ensemble dénombrable. On énumère $A = \{a_0, a_1, \dots\}$. Pour tout $k < \omega$, soit $i_k \in I$ tel que $a_k \in X_{i_k}$. Comme I est D-fini, l'ensemble $I_0 = \{i_k : k < \omega\}$ est fini (s'il était infini, comme c'est l'image d'un ensemble dénombrable on pourrait comme précédemment en déduire une injection de $\mathbb{N}$ dans I). On a donc $A \subset \bigcup_{i\in I_0} X_i$. Comme A est infini, il existe $i \in I_0$ tel que $A \cap X_i$ est infini (c'est le principe des tiroirs, qu'on peut montrer facilement par récurrence sur $|I_0|$). Mais alors $A \cap X_i$ est dénombrable (par le même raisonnement que dans le cas de l'union de deux éléments), ce qui contredit le fait que X_i est D-fini.

5. On définit une application f de $\mathbb{N}$ dans $\mathfrak{P}(\mathfrak{P}(X))$ par $f : k \mapsto \{A \in \mathfrak{P}(X) : |A| = k\}$. Pour $k > 0$, $f(k) \neq \varnothing$ car X est infini. Il est clair alors que f est injective, donc $\mathfrak{P}(\mathfrak{P}(X))$ est D-infini.

6. Soit X tel que tout ensemble fini lui soit subpotent. Il s'en suit qu'aucun ensemble fini ne peut se surjecter sur X. En effet, supposons qu'un ensemble de cardinal n se surjecte sur X. Comme cet ensemble est fini, cette surjection à une section (sans axiome du choix) et donc X est fini de cardinal plus petit que n. Mais on sait aussi que $n+1$ est subpotent à X ce qui impliquerais que $n+1$ est subpotent à n ce qu'on a déjà montré être absurde.

   On peut donc construire par récurrence (en faisant des choix) une suite à valeur dans X. Supposons que les n premiers soient construits, comme n ne peut se surjecter sur X, on peut choisir un point qui n'est pas déjà pris pour x_n. Cette suite nous donne bien une injection de $\mathbb{N}$ dans X.

   Comme tout ensemble fini est subpotent à $\mathbb{N}$, la réciproque est évidente.

7. Comme un ensemble infini est exactement un ensemble auquel tout ensemble fini est subpotent, on a bien montré qu'un ensemble infini est D-infini. La réciproque a été montrée à la question 2.

Exercice 7 (Qui sont ces charmants messieurs ?) **:**
Ce sont, de gauche à droite :

- Bernstein, celui de Cantor-Bernstein ;
- Cantor, celui qui le premier a formalisé la notion d'ensemble, a prouvé (entre autre) que X et 2^X ne sont jamais équipotents, et bien sur le théorème de Cantor-Bernstein ;
- Bertrand Russel à qui on doit, entre autre nombreuses choses, le fait que les barbiers ne peuvent pas se raser, ou plus communément que l'ensemble des ensembles ne peut pas être un ensemble.