Silvain Rideau silvain.rideau@ens.fr
Bureau T5 www.eleves.ens.fr/home/srideau

Corrigé du TD de Logique 2 (Ordinaux)

3 et 6 octobre 2014

Exercice 4 (Points fixes) **:**

1. - On peut prendre $\alpha = \omega^2$, car $\omega + \omega^2 = \omega(1+\omega) = \omega^2$;
   - On peut prendre $\beta = \omega^\omega$, en effet $\omega\omega^\omega = \omega^{1+\omega} = \omega^\omega$;
   - Soit la suite définie par la récurrence suivante : $\omega_0 = 1$, $\omega_{n+1} = \omega^{\omega_n}$. On pose $\gamma = \sup_{n\in\omega} \omega_n$. On a alors $\omega^\gamma = \omega^{\sup_n \omega_n} = \sup_n \omega^{\omega_n} = \sup_n \omega_{n+1} = \gamma$.

2. On définit par récurrence $\alpha_0 = \alpha$ et $\alpha_{n+1} = F(\alpha_n)$ et on pose $\alpha_\omega = \sup_n \alpha_n$. Par hypothèse sur F la suite α_n est croissante. Supposons que cette suite est strictement croissante et donc α_ω est une ordinal limite.

   On a alors $F(\alpha_\omega) = \sup_{\gamma<\alpha_\omega} F(\gamma)$. Comme $\alpha_\omega = \sup_n \alpha_n$, pour tout $\gamma < \alpha_\omega$, il existe n tel que $\gamma < \alpha_n$ et donc $\sup_{\gamma<\alpha_\omega} F(\gamma) \leqslant \sup_n F(\alpha_n) = \sup_n \alpha_{n+1} = \alpha_\omega$. On a donc trouvé un point fixe et il est alors facile de trouver le plus petit comme précédemment. On peut même vérifier que α_ω est ce plus petit point fixe.

   En effet, si $\alpha \leqslant \gamma < \alpha_\omega$ est un point fixe de F, il existe n tel que $\alpha_n \leqslant \gamma < \alpha_{n+1}$ et alors $\alpha_{n+1} = F(\alpha_{n+1}) \leqslant F(\gamma) = \gamma$ ce qui est absurde.

   Si la suite des α_n n'est pas strictement croissante, il existe n tel que $\alpha_n = F(\alpha_n)$. Comme précédemment, si on prend n minimal, on trouve le plus petit point fixe de F au dessus de α.

3. Il est évident que FG est croissante et continue et que pour tout α, $FG(\alpha) \geqslant G(\alpha) \geqslant \alpha$. De plus on peut montrer que α est un point de fixe commun de F et de G si et seulement si c'est un point fixe de FG. Une des implications est triviale. Supposons donc que $FG(\alpha) = \alpha$. Comme $G(\alpha) \geqslant \alpha$, on obtient que $\alpha = FG(\alpha) \geqslant F(\alpha) \geqslant \alpha$ et donc α est un point fixe de F. Maintenant, si $G(\alpha) > \alpha$ on a alors $F(G(\alpha)) \geqslant F(\alpha) = \alpha < G(\alpha)$ ce qui contredit le fait que pour tout γ, $f(\gamma) \geqslant \gamma$ et donc $G(\alpha) = \alpha$.

   Cette question est donc une conséquence immédiate de la précédente.

4. La fonction $x \mapsto \omega + x$ vérifie les hypothèses de la question 2. Il s'en suit donc que son plus petit point fixe est $\sup_n \omega n = \omega^2$. Soit maintenant $\alpha \geqslant \omega^2$. Il existe donc β tel que $\alpha = \omega^2 + \beta$ et donc $\omega + \alpha = \omega + \omega^2 + \beta = \omega^2 + \beta = \alpha$.

5. On a $\omega\omega^{omega}\beta = \omega^{1+\omega}\beta = \omega^\omega\beta$ ce qui prouve une des implications. De comme la fonction $x \mapsto \omega x$ vérifie toutes les hypothèses de la question 2, le plus petit α tel que $\omega\alpha = \omega$ et $\alpha \geqslant 1$ est $\sup_n \omega^n = \omega^\omega$. Soit maintenant α tel que $\omega\alpha = \alpha$. Soit $\alpha = \omega^\omega\beta + \gamma$ la division euclidienne de α par ω^ω. On a alors $\omega^\omega\beta + \gamma = \alpha = \omega\alpha = \omega\omega^\omega\beta + \omega\gamma = \omega^\omega\beta + \omega\gamma$ et donc $\gamma = \omega\gamma$. Comme $\gamma < \omega^\omega$, on doit avoir $\gamma = 0$.

Exercice 5 (Forme normale de Cantor) **:**

1. Soit $\beta = \sup\{\gamma : \omega^\gamma \leqslant \alpha\}$. On a alors $\omega^\beta \leqslant \alpha$. En effet, si β est nul, $\omega^\beta = 1 \leqslant \alpha$, si β est limite alors $\omega^\beta = \sup_{\omega^\gamma \leqslant \alpha} \omega^\gamma \leqslant \alpha$ et si β est successeur alors $\beta \in \{\gamma : \omega^\gamma \leqslant \alpha\}$ et donc $\omega^\beta \leqslant \alpha$. De plus si $\omega^{\beta+1} \leqslant \alpha$, $\beta + 1 \leqslant \beta$ ce qui est absurbe.

2. On procède par induction sur α. Pour l'existence, soit α_1 tel que $\omega^{\alpha_1} \leqslant \alpha < \omega^{\alpha_1+1}$. Soit $\alpha = \omega^{\alpha_1}\delta + \beta$ la division euclidienne de α par ω^{α_1}. Si $\delta \geqslant \omega$, $\alpha = \omega^{\alpha_1}\delta + \beta \geqslant \omega^{\alpha_1}\omega = \omega^{\alpha_1+1}$ ce qui est absurde. Il s'en suit donc que $\delta = k_1 \in \omega$. Si $k_1 = 0$, alors $\alpha = \beta < \omega^{\alpha_1}$ ce qui est aussi absurde. On conclut par hypothèse d'induction appliquée à β.

   Pour ce qui est de l'unicité, supposons $\alpha = \sum_{i=1}^n \omega^{\alpha_i} k_i = \sum_{j=1}^m \omega^{\beta_j} l_j$. Tout d'abord si $n = 0 \neq m$, on a $\alpha = \sum_{i=1}^n \omega^{\alpha_i} k_i = 0 \neq \sum_{j=1}^m \omega^{\beta_j} l_j = \alpha$, il s'en suit que $n = 0$ et seulement si $m = 0$. Supposons qu'ils soient tous deux non-nuls. Si $\alpha_1 > \beta_1$, comme $\omega^{\beta_j}(l_j + 1) < \omega^{\beta_{j-1}}$, on a, par une récurence descendante immédiate sur p, $\sum_{j=p}^m \omega^{\beta_j} l_j < \omega^{\beta_p}(l_j + 1)$ et donc $\alpha < \omega^{\beta_1}(l_j + 1) < \omega^{\alpha_1} \leqslant \alpha$, ce qui est absurde. Donc $\alpha_1 = \beta_1$ par symétrie. Supposons maintenant $k_1 > l_1$, on a alors $\omega^{\alpha_1}(k_1 - l_1) \sum_{i=2}^n \omega^{\alpha_i} k_i = \sum_{j=2}^m \omega^{\beta_j} l_j$ où $\beta_2 < \alpha_1$. Par induction cela est impossible. On a donc $k_1 = l_1$ et on conclut par induction.

3. On a $\sum_i \omega^{\alpha_i} k_i < \sum_i \omega^{\beta_i} k_i$ si et seulement si il existe i_0 tel que pour tout $i < i_0$, $\alpha_i = \beta_i$ et $k_i = l_i$ mais $\alpha_{i_0} > \beta_{i_0}$ ou $\alpha_{i_0} = \beta_{i_0}$ et $k_{i_0} > l_{i_0}$. La preuve est essentiellement la même que la preuve de l'unicité la forme normale de Cantor.

   Pour ce qui est de l'addition, soit i_0 maximal tel que $\alpha_{i_0} \geqslant \beta_1$. Si $\alpha_{i_0} = \beta_1$, on a alors
$$\sum_i \omega^{\alpha_i} k_i + \sum_i \omega^{\beta_i} k_i = \sum_{i=1}^{i_0-1} \omega^{\alpha_i} k_i + \omega^{\alpha_{i_0}}(k_{i_0} + l_1) + \sum_{i=2} \omega^{\beta_i} k_i.$$
   Si $\alpha_{i_0} > \beta_1$,
$$\sum_i \omega^{\alpha_i} k_i + \sum_i \omega^{\beta_i} k_i = \sum_{i=1}^{i_0} \omega^{\alpha_i} k_i + \sum_{i=1} \omega^{\beta_i} k_i.$$

Exercice 6 (Somme naturelle sur les ordinaux) **:**

1. C'est évident.
2. C'est évident en utilisant la description de l'ordre en forme normale de Cantor donnée à la dernière question de l'exercice précédent.
3. C'est aussi immédiat au vue de la dernière question de l'exercice précédent.
4. L'hypothèse faite sur $\oplus^*$ entraîne, par récurrence sur γ, que pour tous ordinaux α, β, γ, on a $\alpha \oplus^* (\beta + \gamma) \geqslant (\alpha \oplus^* \beta) + \gamma$. De même, on a aussi $(\alpha + \gamma) \oplus^* \beta \geqslant (\alpha \oplus^* \beta) + \gamma$.

   On montre par récurrence sur la paire (α, β) que $\alpha \oplus^* \beta \geqslant \alpha \oplus \beta$. (Où on ordonne les paires lexicographiquement, avec la convention de votre choix.) C'est clair pour $(0, 0)$. Supposons que ce soit vrai pour tout $(\alpha', \beta') < (\alpha, \beta)$. On écrit $\alpha = \omega^{\gamma_1} k_1 + \ldots + \omega^{\gamma_n} k_n$ et $\beta = \omega^{\gamma_1} l_1 + \ldots + \omega^{\gamma_n} l_n$ comme dans l'énoncé. Par symétrie, on peut supposer que $l_n > 0$. Alors par l'observation précédente, on a : $\alpha \oplus^* \beta \geqslant (\alpha \oplus^* \omega^{\gamma_1} l_1 + \ldots + \omega^{\gamma_n}(l_n - 1)) + \omega^{\gamma_n}$. Par hypothèse de récurrence, on en déduit :
$$\begin{array}{rcl} \alpha \oplus^* \beta & \geqslant & (\alpha \oplus \omega^{\gamma_1} l_1 + \ldots + \omega^{\gamma_n}(l_n - 1)) + \omega^{\gamma_n} \\ & \geqslant & \omega^{\gamma_1}(k_1 + l_1) + \cdots + \omega^{\gamma_n}(k_n + l_n - 1) + \omega^{\gamma_n} \\ & \geqslant & \omega^{\gamma_1}(k_1 + l_1) + \cdots + \omega^{\gamma_n}(k_n + l_n). \end{array}$$

Exercice 7 (Suites de Goodstein) **:**

1. $f_{2,3}(35) = 3^{28} + 4 =$ beaucoup et $f_{3,\omega}(35) = \omega^\omega + \omega 2 + 2$
2. Remarquons tout d'abord que pour tout $p < q$ si on remplace dans l'écriture en base p d'un nombre p par q, on obtient une écriture en base q. On prouve alors cette question par récurrence. Soit $n \in \mathbb{N}$ et supposons qu'on a vérifié la question pour tout $m < n$. Alors soit, $n = \sum_i n_i p^i$ l'écriture en base p de n. On a alors :
$$\begin{array}{rcl} f_{q,r}(f_{p,q}(n)) & = & f_{q,r}(\sum_i q^{f_{p,q}(i)} n_i) \\ & = & \sum_i r^{f_{q,r}(f_{p,q}(i))} n_i \\ & = & \sum_i r^{f_{p,r}(i)} n_i \\ & = & f_{p,r}(n) \end{array}$$
3. Soient $n < m$ deux entiers et on suppose que pour tout entier strictement plus petit que n, $f_{p,\omega}(n) < f_{p,\omega}(n+1)$. Soient $n = \sum_i p^i \cdot n_i$ et $m = \sum_i p^i \cdot m_i$ leurs écritures en base p. On a alors $\alpha = f_{p,\omega}(n) = \sum_i \omega^{f_{p,\omega}(i)} \cdot n_i$ et $\beta = f_{p,\omega}(m) = \sum_i \omega^{f_{p,\omega}(i)} \cdot m_i$. Soit i_0 maximal tel que $n_i \neq m_i$. Si on suppose que $n < m$, on a alors $n_{i_0} < m_{i_0}$. Soit $\gamma = \sum_{i > i_0} \omega^{f_{p,\omega}(i)} \cdot n_i$. On a donc $\alpha = \gamma + \omega^{f_{p,\omega}(i_0)} n_{i_0} + \sum_{i < i_0} \omega^{f_{p,\omega}(i)} \cdot n_i$ et $\beta = \gamma + \omega^{f_{p,\omega}(i_0)} m_{i_0} + \sum_{i < i_0} \omega^{f_{p,\omega}(i)} \cdot m_i$.

   On démontre par induction sur j que $\sum_{i<j} \omega^{f_{p,\omega}(i)} \cdot n_i < \omega^{f_{p,\omega}(j)}$. En effet,
$$\begin{array}{rcl} \sum_{i<j+1} \omega^{f_{p,\omega}(i)} \cdot n_i & = & \omega^{f_{p,\omega}(j)} \cdot n_j + \sum_{i<j} \omega^{f_{p,\omega}(i)} \cdot n_i \\ & < & \omega^{f_{p,\omega}(j)} \cdot (n_j + 1) \\ & < & \omega^{f_{p,\omega}(j)+1} \\ & \leqslant & \omega^{f_{p,\omega}(j+1)}. \end{array}$$
   Il s'en suit donc que $\alpha < \gamma + \omega^{f_{p,\omega}(i_0)} \cdot (n_{i_0} + 1) \leqslant \gamma + \omega^{f_{p,\omega}(i_0)} \cdot m_{i_0} \leqslant \beta$.

4.
$$\begin{array}{rclcccl} g_2(5) & = & 5 & & & & \\ g_3(5) & = & f_{2,3}(2^2+1)-1 & = & 3^3 & = & 27 \\ g_4(5) & = & f_{3,4}(27)-1 & = & 4^4-1 & = & 255 \\ g_5(5) & = & f_{4,5}(255)-1 & = & 5^3\cdot 3+5^2\cdot 3+5\cdot 3+2 & = & 467 \\ g_6(5) & = & f_{5,6}(467)-1 & = & 6^3\cdot 3+6^2\cdot 3+6\cdot 3+1 & = & 775, \end{array}$$

sauf si je me suis trompé...

5. Si $g_{n+1}(a) = 0$, alors $f_{n+1,\omega}(g_{n+1}(a)) = 0$. Sinon, $f_{n+1,\omega}(g_{n+1}(a)) = f_{n+1,\omega}(f_{n,n+1}(g_n(a))-1) < f_{n+1,\omega}(f_{n,n+1}(g_n(a))) = f_{n,\omega}(g_n(a))$. Il s'en suit donc que cette suite est strictement décroissante jusqu'à atteindre 0, ce qui arrive à un moment vu que c'est une suite d'ordinaux strictement décroissante et ensuite elle est constante égale à zéro.

6. Comme on a montré à la question précédente, il existe n tel que $f_{n,\omega}(g_n(a)) = 0$ et donc $g_n(a) = 0$.

Exercice 8 (Qui sont ces charmants messieurs ?) **:**
De gauche à droite :

- Goodstein, celui de l'exercice 7 ;
- Dedekind, celui des coupures et de l'exercice 6 du TD 1 ;
- Le retour de Cantor, il est partout cet homme !