Silvain Rideau
Bureau T5

silvain.rideau@ens.fr
www.eleves.ens.fr/home/srideau

TD de Logique 4

17 et 20 octobre 2014

Les exercices qui ne sont pas abordés en cours, seront (certainement) corrigés sur ma page personelle (voir ci-dessus).

Exercice 1 (Ordres) **:**

1. Donner les axiomes d'ordre strict (total) dans le langage $\mathcal{L} = \{=, <\}$.
2. Donner les axiomes d'ordre strict total dense (i.e. tel que, un intervalle ouvert dont les extrémités sont distinctes contienne un point). Donner un axiome qui dit que l'ordre a un plus grand élément ; que l'ordre n'a pas de plus grand élément.
3. Trouver un $\mathcal{L}$-énoncé φ_1 qui est vrai dans $(\mathbb{Z}, <)$ et faux dans $(\mathbb{Q}, <)$.
4. Trouver un $\mathcal{L}$-énoncé φ_2 qui est vrai dans $(\mathbb{Z}, <)$ et faux dans $(\mathbb{N}, <)$.
5. Soient $n \neq m$ deux entiers. Trouver un $\mathcal{L}$-énoncé φ_3 qui est vrai dans $(\omega \cdot n, <)$ et faux dans $(\omega \cdot m, <)$.
6. Même question en prenant $(\omega^2, <)$ et $(\omega^3, <)$.

Exercice 2 (Ordinaux non-élémentairement équivalents) **:**
Montrer que $(\alpha, <)$ et $(\beta, <)$ pour $\alpha, \beta < \omega^\omega 2$, $\alpha \neq \beta$ ne sont pas élémentairement équivalents. [Rappel : M et N sont élémentairement équivalents, noté $M \equiv N$, si et seulement s'ils satisfont les mêmes énoncés.]

Exercice 3 (Axiomatique des corps) **:**
Soit $\mathcal{L}$ le language constitué des symboles $\{+, -, 0, \times, 1\}$ (où $-$ est une fonction unaire).

1. Donner les axiomes des corps dans $\mathcal{L}$.
2. Soit p un nombre premier, donner un $\mathcal{L}$-axiome qui précise que le corps est de caractéristique p.
3. Peut-on axiomatiser dans $\mathcal{L}$ la théorie des corps de caractéristique 0 ?
4. Peut-on axiomatiser dans $\mathcal{L}$ la théorie des corps algébriquement clos ?
5. Donner un $\mathcal{L}$-énoncé vrai dans $\mathbb{R}$ et faux dans $\mathbb{Q}$.
6. L'ordre sur $\mathbb{R}$ est-il définissable dans $\mathcal{L}$?

Exercice 4 (Systèmes de connecteurs) **:**
On dit qu'un système de connecteurs $\{c_1, \ldots, c_n\}$ est complet si tout formule propositionnelle est équivalente à une formule n'utilisant que les c_i (et des variables propositionnelles).

1. Montrer que le système $\{\wedge, \neg\}$ est complet.
2. Montrer que le système $\{\implies, \perp\}$ est complet, où $\perp$ est la constante « Faux ».
3. Montrer que le système $\{\iff, \neg\}$ n'est pas complet.
4. Trouver un système de 8 connecteurs binaires (deux à deux distincts) qui ne soit pas complet.

Exercice 5 (Structures finies) **:**
Soit $\mathcal{M}$ une structure finie et $\mathcal{N} \equiv \mathcal{M}$.

1. Soit $k \in \mathbb{N}$, montrer qu'il existe des formules $\varphi_1[x_1, \ldots, x_k]$ telles que pour toute formule $\varphi[x_1, \ldots, x_k]$, il existe i tel qu'on ait $\mathcal{M} \models \varphi[m_1, \ldots, m_k] \iff \varphi_i[m_1, \ldots, m_k]$.

2. Supposons $M = \{m_1, \dots, m_n\}$, et soient φ_j telles qu'à la question 1 pour $k = n$. Montrer qu'on peut écrire $N = \{n_1, \dots, n_n\}$, avec, pour tout j, $\mathcal{M} \vDash \varphi_j[m_1, \dots, m_n]$ si et seulement si $\mathcal{N} \vDash \varphi_j[n_1, \dots, n_n]$.

3. Conclure que $\mathcal{N} \simeq \mathcal{M}$.

Exercice 6 (Préservation) **:**

1. Un énoncé est universel si il s'écrit $\forall x_1 \dots \forall x_n \varphi[x_1, \dots, x_n]$ où φ est sans quantificateurs. Montrer que si φ est universel et $\mathcal{M} \vDash \varphi$, alors φ est vrai dans toute sous-structure de $\mathcal{M}$.

2. Un énoncé est existentiel si il s'écrit $\exists x_1 \dots \exists x_n \varphi[x_1, \dots, x_n]$ où φ est sans quantificateurs. Montrer que si φ est existentiel et $\mathcal{M} \vDash \varphi$, alors φ est vrai dans toute sur-structure de $\mathcal{M}$.

3. Soit $(I, <)$ un ensemble ordonné filtrant, i.e. si $i, j \in I$, il existe k tel que $i \leqslant k$ et $j \leqslant k$, $\mathcal{L}$ un language et $(\mathcal{M}_i)_{i \in I}$ des $\mathcal{L}$-structures telles que $\mathcal{M}_i$ sous-structure de $\mathcal{M}_j$ si $i \leqslant j$. Montrer qu'on peut munir $\bigcup_i M_i$ d'une $\mathcal{L}$-structure $\mathcal{M}$ telle que pour tout $i \in I$, $\mathcal{M}_i$ est une sous-structure de $\mathcal{M}$.

4. Soit φ un énoncé $\forall\exists$, i.e. φ s'écrit de la forme $\forall x_1 \dots \forall x_n \exists y_1 \dots \exists y_m \psi[x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m]$ où ψ est sans quantificateurs. Montrer que si φ est vrai dans tout les $\mathcal{M}_i$ alors φ est vrai dans dans $\mathcal{M}$ (avec les notations de la question précédente).

Les réciproques de ces propriétés de préservations sont vraies, mais on attendra les semaines qui viennent pour les montrer.

Exercice 7 (Clôture algébrique) **:**

Remarque 1 :
Un automorphisme d'une $\mathcal{L}$-structure M est un isomorphisme de M avec lui-même ; l'ensemble des automorphismes de M est noté $\mathrm{Aut}(M)$, et la composition y définit une loi de groupe.
De plus, si $\sigma \in \mathrm{Aut}(M)$, $\bar{a}$ est un uplet de M et φ une formule, on aura

$$M \vDash \varphi(\bar{a}) \text{ si et seulement si } M \vDash \varphi(\sigma(\bar{a})).$$

Notation 2 :
Soient $\mathcal{L}$ un langage et $\mathcal{M}$ une $\mathcal{L}$-structure, $\varphi(\bar{x})$ une $\mathcal{L}$-formule, $\bar{x}$ un n-uplet de variables. On appelle *sous-ensemble de M^n défini par* φ, l'ensemble

$$\varphi(\mathcal{M}) := \{\bar{b} \in M^n : \mathcal{M} \vDash \varphi(\bar{b})\}.$$

De même, si $\psi(\bar{x}, \bar{y})$ est une formule, $\bar{y}$ un m-uplet de variables, et $\bar{c} \in M^m$, on note

$$\psi(\mathcal{M}, \bar{c}) := \{\bar{b} \in M^n : \mathcal{M} \vDash \psi(\bar{b}, \bar{c})\}.$$

Soit $\mathcal{L}$ un langage et $\mathcal{M}$ une $\mathcal{L}$-structure et $A \subseteq M$. On dit que $d \in M$ est A-algébrique s'il existe $\varphi[x, y_1, \dots, y_n]$ et $a_1, .., a_n \in A$ tels que $\mathcal{M} \vDash \varphi[d, \bar{a}]$ et $\varphi(\mathcal{M}, \bar{a})$ est fini. On note $\mathrm{acl}_{\mathcal{M}}(A)$ l'ensemble des éléments de M qui sont A-algébriques.

1. Montrer que $|\mathrm{acl}_{\mathcal{M}}(A)| \leqslant \max\{|A|, |\mathcal{L}|, \aleph_0\}$.

2. Montrer que si $A \subseteq B$, alors $\mathrm{acl}_{\mathcal{M}}(A) \subseteq \mathrm{acl}_{\mathcal{M}}(B)$.

3. Montrer que $\mathrm{acl}_{\mathcal{M}}(\mathrm{acl}_{\mathcal{M}}(A)) = \mathrm{acl}_{\mathcal{M}}(A)$.

4. Montrer que si $d \in \mathrm{acl}_{\mathcal{M}}(A)$, alors $d \in \mathrm{acl}_{\mathcal{M}}(A_0)$ pour un $A_0 \subseteq A$ fini.

5. Soit σ un automorphisme de $\mathcal{M}$ qui fixe A, montrer que d a une orbite finie sous σ, i.e. $\{\sigma^n(d) : n \in \mathbb{N}\}$ est fini.

6. Soit $\mathcal{M} = (\mathbb{R}, <)$, déterminer $\mathrm{acl}_{\mathcal{M}}(\mathbb{Q})$?

Exercice 8 (Clôture définissable) **:**
Si dans la définition de la clôture algébrique, au lieu d'exiger que l'ensemble $\varphi(M, \bar{a})$ soit fini, on exige qu'il soit égale à $\{d\}$, on dira que d est A-définissable (dans M). L'ensemble des éléments A-définissables forme la clôture définissable de A, notée $\mathrm{dcl}_{\mathcal{M}}(A)$. On a $\mathrm{dcl}_{\mathcal{M}}(A) \subseteq \mathrm{acl}_{\mathcal{M}}(A)$.

1. Faites les question 1 à 4 de l'exercice précédent, en remplacant acl par dcl.
2. Quel est le bon analogue de la question 5 de l'exercice précédent ?
3. Soit $\mathcal{M} = (\mathbb{R}, +, 0, <)$. Montrez que $\mathrm{acl}_{\mathcal{M}}(A) = \mathrm{dcl}_{\mathcal{M}}(A)$ pour tout sous-ensemble A de $\mathbb{R}$, et que $\mathrm{dcl}(\{1\}) = \mathrm{dcl}(\mathbb{Z}) \supseteq \mathbb{Q}$. L'egalité est vraie, mais un peu difficile à montrer maintenant car elle exige des outils plus forts.

Exercice 9 (Qui sont ces charmants messieurs ?) **:**