Silvain Rideau
Bureau T5

silvain.rideau@ens.fr
www.eleves.ens.fr/home/srideau

Corrigé du TD de Logique 4

17 et 20 octobre 2014

Exercice 1 (Ordres) **:**

1. - $\forall x, y, z,\ [(x < y) \wedge y < z)] \to (x < z)$;
   - $\forall x,\ \neq x < x$;
   - $\forall x, y\,(x < y \vee y < x \vee x = y)$.
2. Les axiomes précédents, plus :
   - $\forall x, y,\ (x < y) \to (\exists z(x < z \wedge z < y))$ pour la densité.
   - $\exists x \forall y,\ (y = x \vee y < x)$ pour l'existence d'un plus grand élément.
   - $\forall x \exists y,\ y > x$ pour l'absence de plus grand élément.
3. La négation de l'axiome de densité : $\exists x, y \forall z(z > x \to z = x \vee z = y \vee z > y)$.
4. $\forall x \exists y,\ y < x$.
5. voir l'exerice suivant.
6. voir l'exerice suivant.

Exercice 2 :
On définit la formule $\lim_i$ par induction pour $i \in \mathbb{N}^{>0}$:

- $\lim_0(x) := x = x$
- $\lim_{i+1}(x) := \lim_i(x) \wedge [\forall y(y < x \wedge \lim_i(y)) \to (\exists z,\ \lim_i(z) \wedge y < z \wedge z < x)]$.

L'ensemble défini par $\lim_0(\alpha)$ est l'ensemble de tous les points de α, $\lim_1(\alpha)$ définit l'ensemble des $\beta < \alpha$ qui sont limites. Remarquez qu'ici on a décidé que 0 était limite (il vérifie bien la formule). On fait cela essentiellement pour des raisons pratiques (pour rendre les considérations ultérieures plus simples). Ensuite un itère la construction en définissant $\lim_2$ l'ensemble des limites dans $\lim_1$ etc. Plus précisément comme $\lim_i(\alpha)$ est un sous-ensemble de α, on peut aussi le munir d'une $\mathcal{L}$-structure et on a alors $\lim_{i+1}(\alpha) = \lim_1(\lim_i(\alpha))$.
Vous remarquerez que pour $i \geqslant 1$, $\lim_{i+1}$ est obtenue à partir de $\lim_1$ en *relativisant les quantificateurs à l'ensemble défini par* $\lim_i$. En effet, nous voulons définir l'ensemble des points non isolés de $\lim_i(\alpha)$. La relativisation est faite de la façon suivante : chaque fois qu'un quantificateur existentiel apparaît dans la formule $\lim_1(x)$, disons appliqué à la variable z, on remplace $\exists z\,(\ldots)$ par $\exists z\,(\lim_i(z) \wedge \ldots)$; de même, une occurrence de quantificateur universel, par exemple $\forall y\,(\ldots)$ sera remplacée par $\forall y(\lim(y) \to \ldots)$.
On remarque aussi que $\lim_1(\omega) = \{0\}$, alors que $\lim_1(\omega + 1) = \{0, \omega\}$. De même, $\lim_n(\omega^n) = \{0\}$, $\lim_n(\omega^n + \gamma) = \{0, \omega^n\}$ si $0 < \gamma < \omega^n$.
Revenons-en plus précisément à la question qui nous occupe. A tout ordinal $\alpha < \omega^\omega$ peut être écrit sous sa forme normal de Cantor : $\alpha = \omega^\omega e + \omega^k n_k + \omega^{k-1} n_{k-1} + \cdots + \omega^0 n_0$ où $e = 0, 1$, k et les $n_i \in \mathbb{N}$ et $n_k \neq 0$. Cette écriture est unique (et elle diffère un tout petit peu de la forme qu'on prend habituellement). Pour des raisons pratiques, on se permettra aussi de parler de n_i pour $i > k$ mais on les prendra nuls. Par récurrence sur i on montre alors que $\lim_i(\alpha)$ est un ordinal isomorphe à $\omega^\omega e + \omega^{k-i} n_k + \omega^{k-1} n_{k-1} + \cdots + \omega^{i-i} n_i + \epsilon_i$ où $\epsilon_i = 1$ s'il existe $j < i$ avec $n_j \neq 0$ et $\epsilon_i = 0$ sinon. Pour tout ordinal α, notons $\mathrm{fin}(\alpha) \in \mathbb{N}$ le reste de la division euclidienne de α par ω (en terme d'ordres c'est la taille du plus grand segment final fini de α). On a alors $\mathrm{fin}(\lim_i(\alpha)) = n_i + \epsilon_i$.
Il est alors facile d'écrire un énoncé $\varphi_{k,m}$ telle que $\alpha \vDash \varphi_{k,m}$ si et seulement si $n_k = m$. La formule suivante devrait faire l'affaire :

$$[\exists^{=m,\max} x,\ \lim_k(x) \wedge \bigwedge_{l<k} \exists^{=0,\max} x,\ \lim_l(x)] \vee [\exists^{=m+1,\max} x,\ \lim_k(x) \wedge \bigvee_{l<k} \exists^{=1,\max} x,\ \lim_l(x)]$$

où $\exists^{=m,\max}x,\ \varphi(x)$ est la formule suivante :

$$\exists x_1 \dots x_m,\ \bigwedge_m \varphi(x_i) \wedge \bigwedge_{i<j} x_i < x_j \wedge [\forall y,\ \varphi(y) \Rightarrow [(y < x_1 \wedge \exists z\ , \lim_k(z) \wedge y < z \wedge z < x) \vee \bigvee_i y = x_i]]$$

si $m \neq 0$ et $\exists^{=0,\max}x,\ \varphi(x) := \forall x,\ \varphi(x) \Rightarrow \exists y(\varphi(y) \wedge y > x)$.
Ainsi si $\beta = \omega^\omega d + \omega^l m_l + \cdot + \omega^0 m_0$, s'il existe i tel que $n_i \neq m_i$ il y a un énoncé vrai dans α et fausse dans β (par exemple la formule φ_{i,n_i}). Si pour tout $i \in \mathbb{N}$, $n_i = m_i$ on a alors $e \neq d$ et donc l'un des deux est plus grand que ω^ω et vérifie donc pour tout k, $\exists xy,\ x < y \wedge \lim_k(x) \lim_k(y)$ alors que l'autre non.
Le résultat qu'on vient de montrer est en quelque sorte optimal puisqu'on peut montrer pour tout ordinal α il existe un ordinal $\beta < \omega^\omega 2$ tel que $\alpha \equiv \beta$ (je pense avoir une idée de la preuve mais on en reparlera si vous voulez quand on aura fait un peu d'élimination des quantificateurs).

Exercice 3 :

1.
   - $\forall x \forall y \forall z, (x + y) + z = x + (y + z) \wedge (x \times y) \times z = x \times (y \times z) \wedge x \times (y + z) = (x \times y) + (x \times z)$,
   - $\forall x \forall y, x + y = y + x \wedge x \times y = y \times x$,
   - $\forall x, x + 0 = x \wedge x \times 1 = x \wedge x + (-x) = 0 \wedge (x = 0 \vee (\exists y, x \times y = 1))$.
2. $\sum_{i=1}^{p} 1 = 0$.
3. On l'axiomatise par la théorie suivante $\{\sum_{i=1}^{p} 1 \neq 0 : p \in \mathbb{N}\}$ où $\sum_{i=k}^{l} t_i$ est une notation pour $t_k + \dots + t_l$.
4. On l'axiomatise par la théorie suivante $\{\forall x_0 \dots \forall x_n, x_n = 0 \vee (\exists y \sum_i x_i y^i = 0) : n \in \mathbb{N}^\star\}$ où t^k est une notation pour $t \times \dots \times t$ où t apparaît k fois.
5. $\mathbb{R} \models \exists x, x \times x = 2$ mais pas $\mathbb{Q}$.
6. Il est définissable par $x \leqslant y := \exists z, x - y = z^2$.

Exercice 4 (Systèmes de connecteurs) **:**

1. Tout connecteur booléen étant donné par sa table de vérité, il est clair qu'ils sont tous équivalents à une forme normale conjonctive (ou disjonctive si vous préférez) et donc que $\{\wedge, \vee, \neg\}$ est complet. Mais $P \vee Q \iff \neg(\neg P \wedge \neg Q)$ et donc $\{\wedge, \neg\}$ est complet.

2. **Lemme 1 :**
   La table de vérité d'une formule à n varibales ($n \geqslant 2$) ne contenant que des $\neg$ ou des $\iff$ contient un nombre pair de « vrai »

   Démonstration. On procède par induction sur les formules. Pour une variable seule c'est évident car elle contient 2^{n-1} « vrai » et autant de « faux ». De plus, si c'est vrai pour φ c'est aussi vrai pour ϕ, en effet 2^n étant pair, le complémentaire à 2^n d'un nombre pair est pair.

   Reste le cas de $\varphi \iff \psi$ et où on suppose que l'hypothèse d'induction est vérifiée pour φ et ψ. Supposons que φ et ψ ont la même valeur de vérité dans un nombre impair de cas. S'il y a un nombre pair de cas dans lequel ils sont tous les deux « vrais », alors il y a un nombre pair de cas où φ est vraie et ψ est fausse. Dans Le cas où il y a un nombre impair de cas dans lequel ils sont tous les deux « vrais », on a alors un nombre impair de cas où φ est vraie et ψ est fausse. Dans les deux cas cela implique que ψ est fausse dans un nombre impair de cas, ce qui est absurde. ■

   Il est alors évident que ce système de connecteurs ne peut pas être complet, ce serait-ce que parce qu'il ne permet pas de définir $\wedge$.

3. Considérons le système des 8 connecteurs binaires qui valent toujours « vrai » sur quand les deux variables valent « vrai ». Il est alors évient que toute formule écrite avec ces connecteurs sera vraie quand toutes ses variables sont vraies. Ce système ne peut donc pas être complet.

Exercice 5 (Structures finies) **:**

1. Soit $n = |M|$, comme il y a 2^{n^k} fonctions de $M^k \to \{0,1\}$, il y a, à équivalence près dans $\mathcal{M}$, au plus 2^{n^k} formules à k variables. Il suffit alors de choisir une formule (φ_i) dans chacune de ces classes d'équivalences.

2. La formule
$$\exists x_1 \dots \exists x_n \bigwedge_{i<j} x_i \neq x_j \wedge \forall y \bigvee_i y = x_i \bigwedge_{j,\delta\in T_j} \varphi_j[x_{\delta(1)}, \dots, x_{\delta(n)}] \bigwedge_{j,\varphi\notin T_j} \neg\varphi_j[x_{\delta(1)}, \dots, x_{\delta(n)}],$$
où $T_j = \{\delta : \mathcal{M} \vDash \varphi_j[m_{\delta(1)}, \dots, m_{\delta(n)}]\}$, est vraie dans $\mathcal{M}$ et elle est donc aussi vraie dans $\mathcal{N}$. En posant n_i l'élément de N qui réalise x_i dans cette formule, on obtient bien la propriété voulue.

3. Soit $\psi : m_i \mapsto n_i$, montrons que c'est un isomorphisme. Il suffit de montrer que pour toute formule $\varphi[x_1, \dots, x_k]$ et tout $(a_i) \in M^k$, $\mathcal{M} \vDash \varphi[a_1, \dots, a_k]$ si et seulement si $\mathcal{N} \vDash \varphi[\psi(a_1), \dots, \psi(a_k)]$. Pour tout i il existe j_i tel que $a_i = m_{j_i}$. Quitte à rassembler les a_i identiques, à rajouter des variables inutiles et à permuter certaines variables, on peut trouver une formule φ' telle que $\mathcal{M} \vDash \varphi[m_{i_1}, \dots, m_{ik}] \iff \varphi'[m_1, \dots, m_n]$. Mais on a alors par hypothèse $\mathcal{M} \vDash \varphi'[m_1, \dots, m_n]$ si et seulememt si $\mathcal{M} \vDash \varphi_i[m_1, \dots, m_n]$, pour un certain i, si et seulement si $\mathcal{N} \vDash \varphi_i[\psi(m_1), \dots, \psi(m_n)]$, si et seulement si $\mathcal{N} \vDash \varphi[\psi(m_{i_1}), \dots, \psi(m_{i_k})]$.

Exercice 6 (Préservation) **:**

1. Soit $\mathcal{N} \subseteq \mathcal{M}$ et $\varphi = \forall x_1 \dots \forall x_n \psi[x_1, \dots, x_n]$. Soient $(a_i) \in N^n$, comme $\mathcal{N}$ est une sous structure et ψ sans quantificateurs, on a $\mathcal{N} \vDash \psi[a_1, \dots, a_n]$ si et seulement si $\mathcal{M} \vDash \psi[x_1, \dots, x_n]$ (cela se démontrer par induction sur la formule), mais cela est vrai par hypothèse.

2. C'est évident par le même genre de raisonnement que dans l'exercice précédent ou en disant que $\neg\varphi$ est universelle et en appliquant la question précédente.

3. Soit f une fonction de $\mathcal{L}$ (d'arité n) et $a \in (\bigcup_i M_i)^n$. Comme I est filtrant, il existe i tel que $a \in M_i^n$. On pose alors $f^{\mathcal{M}}(a_1, \dots, a_n) = f^{\mathcal{M}_i}(a_1, \dots, a_n)$. Si $j \neq i$ est tel que $a \in M_j^n$, soit k tel que $i < k$ et $j < k$. Comme $\mathcal{M}_i \subseteq \mathcal{M}_j$ si $i < j$, on a alors $f^{\mathcal{M}_i}(a_1, \dots, a_n) = f^{\mathcal{M}_k}(a_1, \dots, a_n) = f^{\mathcal{M}_j}(a_1, \dots, a_n)$. Cette définition a donc un sens (et ne dépend pas du i choisit). De même pour les relations.

   Soit alors $i \in I$, f une $\mathcal{L}$-fonction d'arité n et $a_i \in M_i$, par définition de $f^{\mathcal{M}}$ (et du fait que cette définition ne dépend pas du i choisit) on a alors $f^{\mathcal{M}}(a_1, \dots, a_n) = f^{\mathcal{M}_i}(a_1, \dots, a_n)$. De même pour les relations.

4. Soit $a_1, \dots, a_n \in M$, comme I est filtrant, on trouve $i \in I$ tel que tous les $a_j \in M_i$. on trouve alors dans M_i un uplet $b_1, \dots, b_m \in M_i \subseteq M$ tel que $M_i \vDash \varphi[\bar{a}, \bar{b}]$. Mais comme φ est sans quantificateurs et que M_i est une sous-structure de M on obtient bien que $M \vDash \varphi[\bar{a}, \bar{b}]$

Exercice 7 (Clôture algébrique) **:**

1. À chaque élément de acl_M on peut associer une formule de $\mathcal{L}$ à paramètres dans A (la formule dont il est une des solution en nombre fini). On a donc une fonction de $acl_M(A) \to \{\mathcal{L}$-formules à paramètres dans $A\}$ telle que l'image réciproque de chaque point est finie. Il s'en suit donc que $acl_M(A)$ s'injecte dans $\{\mathcal{L}$-formules à paramètres dans $A\} \times \mathbb{N}$. Il reste alors à voir que le cardinal de $\{\mathcal{L}$-formules à paramètres dans $A\}$ est $\max\{|A|, |\mathcal{L}|, \aleph_0\}$.

2. Toute formule à paramètres dans A étant à paramètres dans B, c'est évident.

3. On a toujours $A \subseteq acl_M(A)$. En effet prendre pour $\varphi[x, y]$ la formule « $x = y$ », pour tout $d \in A$, on a alors d unique réalisation de $\varphi[x, d]$ dans $\mathcal{M}$. Par la question précédente, $acl_M(A) \subseteq acl_M(acl_M(A))$.

   Il reste à montrer l'autre inclusion. Soit $d \in acl_M(acl_M(A))$. Il existe donc une formule $\varphi[x, y_1, \dots, y_n]$ et $a_1, \dots, a_n \in acl_M(A)$ telle que $\mathcal{M} \vDash \varphi[d, a_1, \dots, a_n]$ et telle qu'il existe au plus n éléments $d' \in M$ pour lesquels $\mathcal{M} \vDash \varphi[d', a_1, \dots, a_n]$. D'autre part, pour $1 \leqslant k \leqslant n$, il existe une formule $\theta_i[x, y_1^i, \dots, y_{k_i}^i]$ et des points $a_1^i, \dots, a_{k_i}^i \in A$ tels que $\mathcal{M} \vDash \theta_i[a_i, a_1^i, \dots, a_{k_i}^i]$ et telle qu'il existe au plus n_i éléments d' de M pour lesquels $\mathcal{M} \vDash \theta_i[d', a_1^i, \dots, a_{k_i}^i]$.

   Soit $\zeta[y_1, \dots, y_n]$ la formule $\exists^{=n} x\varphi[x, y_1, \dots, y_n]$. On considère alors la formule
$$\psi[x, y_1^1, \dots, y_{k_n}^n] = \exists y_1 \dots \exists y_n, \zeta[y_1, ..., y_n] \wedge \varphi[x, y_1, ..., y_n] \wedge \bigwedge_{i\leqslant n} \theta_i[y_i, y_1^i, ..., y_{k_n}^i].$$
   On peut alors vérifier que $\mathcal{M} \vDash \psi[d, a_1^1, \dots, a_{k_n}^n]$ et que cette formule a au plus $n \prod_i n_i$ solutions dans $\mathcal{M}$.

4. Soit $\varphi[x, y_1, \ldots, y_n]$ et $a_1, \ldots, a_n$ tel que d est une des solutions en nombre fini de $\varphi[x, a_1, \ldots, a_n]$ dans $\mathcal{M}$. En posant $A_0 = \{a_i : 1 \leqslant i \leqslant n\}$, on a alors $d \in acl_M(A_0)$.

5. Comme σ est un automorphisme de $\mathcal{M}$ qui fixe A, on a $\mathcal{M} \models \varphi[b, a_1, \ldots, a_n]$ si et seulement si $\mathcal{M} \models \varphi[\sigma(b), a_1, \ldots, a_n]$. Il s'en suit donc que $\{\sigma^n(d)\}$ est inclus dans l'ensemble fini des solutions de $\varphi[x, a_1, \ldots, a_n]$ dans $\mathcal{M}$.

6. Soit $r \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Supposons $r \in acl_M(\mathbb{Q})$. Par la question 4, il existe un ensemble fini de rationnels Q tel que $d \in acl_M(Q)$. Mais il est facile de construire un automorphisme de $(\mathbb{R}, <)$, i.e. une fonction strictement croissantes qui fixe Q mais telle que tout autre point de $\mathbb{R}$ a une orbite infinie. Il suffit pour cela par exemple que $f(x) > x$ sur $\mathbb{R} \setminus Q$. Mais cela contredit la question 5.

Exercice 8 (Clôture définissable) **:**

1. Les même arguments que dans le cas précédent marchent.

2. b est dans la clôture définissable de A (dans $\mathcal{M}$) si et seulement s'il est fixé par tout automorphisme de $\mathcal{M}$ qui fixe A. C'est la même preuve que dans le cas précédent.

3. Comme $\mathcal{M} = (\mathbb{R}, +, 0, <)$ est ordonné, dans tout ensemble fini, on peut distinguer le premier élément, le deuxième élément etc. Ils sont donc tous définissables. Plus précisément si $|\varphi(\mathcal{M}, \bar{a})| = n$ alors chacune des formules $\varphi_k(y, \bar{a}) \coloneqq \exists x_1, \ldots, x_n,\ \bigwedge_{i<j} x_i < x_j \wedge \bigwedge_i \varphi(x_i, \bar{a}) \wedge y = x_k$ définit un singleton distinct (inclus dans $\varphi(\mathcal{M}, \bar{a})$) dans $\mathcal{M}$.

   De plus $n = 1 + \cdots 1$ où 1 apparaît n fois du coup $\mathrm{dcl}(\{1\}) \supseteq \mathbb{Z}$, de plus n/m est l'unique point vérifiant $x + \cdots + x = n$ où x apparaît m fois, du coup $\mathbb{Q} \subseteq \mathrm{dcl}(\mathbb{Z}) \subseteq \mathrm{dcl}(\mathrm{dcl}(\{1\})) = \mathrm{dcl}(\{1\})$.

Exercice 9 (Qui sont ces charmants messieurs ?) **:**
De gauche à droite :

- David Hilbert, qui parmi ses problèmes avait posé la question des fondations formelle des mathématiques et de la cohérence de l'arithmétique (problème 2). Certains systèmes de preuve formelle sont d'ailleurs appelés « à la Hilbert » ;

- Gottlob Frege, parmi les premier a essayer de formaliser systématiquement les mathématiques (entre autre dans son livre, le Begriffsschrift). La théorie de la démonstration, la part syntaxique de la théorie des modèles et plus généralement les notations des mathématiques modernes sont en partie le fruit de son travail ;

- Ludwig Wittgenstein, philosophe, élève de Russel qui dans son Tractatus logico-philosophicus traite de la question de la vérité, du lien de la syntaxe au sens. C'est un peu le père conceptuel de la théorie des modèles.