Silvain Rideau
Bureau T5
silvain.rideau@ens.fr
www.eleves.ens.fr/home/srideau

TD de Logique 5 (Compacité)

24 et 27 octobre 2014

Les exercices qui ne sont pas abordés en cours, seront (certainement) corrigés sur ma page personelle (voir ci-dessus).

Exercice 1 (Propriétés axiomatisables) **:**
Parmi les classes de structures suivantes, déterminer celles qui sont finiment axiomatisable (i.e. avec un nombre fini d'axiomes), axiomatisable (mais pas finiment), ou non axiomatisable :

1. Les ensembles infinis (dans le langage de l'égalité),
2. Les ensembles finis,
3. Les corps de caractéristique nulle,
4. Les corps de caractéristique non nulle (dans le langage des anneaux),
5. Les ensembles biens ordonnés (dans le langage des ordres).

Exercice 2 (Coloriage de graphes) **:**
Soit k un entier. Un graphe G est dit k-coloriable s'il existe un coloriage des sommets de G avec k couleurs des telle sorte à ce que deux sommets adjacents ne soient jamais de la même couleur.
Montrer qu'un graphe infini est k-coloriable si et seulement si tous ses sous-graphes finis le sont.
[Indication : appliquer le théorème de compacité à un ensemble d'énoncés bien choisi.]

Exercice 3 (Groupes pseudo-finis) **:**
Soit $(G_i)_{i\in I}$ des groupes finis que l'on étudie dans le langage $\{\times, 1, .^{-1}\}$. On note $T_0 = \{\text{énoncés } \varphi : \forall i\ G_i \vDash \varphi\}$.

1. Supposons que T_0 admette des modèles infinis, donner une axiomatisation T des modèles de T_0 qui sont infinis. Montrer que ce sont des groupes.
2. Donner une condition nécessaire et suffisante sur les G_i pour que T_0 admette des modèles infinis.
3. Montrer qu'un énoncé φ est conséquence de T si et seulement s'il existe n tel que φ soit vrai dans tous les G_i de cardinal plus grand que n.

Exercice 4 (Modèles non standards) **:**
Soit $\mathcal{L}_{\mathrm{ar}} = \{0, s, +, -, \times, 1, <\}$ et notons $\mathcal{N} = (\mathbb{N}, 0, s, +, \times, 1, <\}$ où les symboles ont leurs interprétations standards (s est la fonction successeur). On note $\overline{n} = s^n(0)$.
On note $T = \mathrm{Th}(\mathcal{N})$.

1. Montrer qu'il existe $\mathcal{M} \vDash T$ et $a \in M$ tel que $a > \overline{n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et qu'on peut de plus supposer ce a divisible par tout $\overline{n}$ ($n \neq 0$ bien entendu).
2. Soit $\varphi[x]$ une formule telle que $\mathcal{M} \vDash \varphi[\overline{n}]$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, montrer que pour tout $a \in M$, $\mathcal{M} \vDash \varphi[a]$.
3. En déduire que $\{\overline{n} : n \in \mathbb{N}\}$ n'est pas définissable dans $\mathcal{M}$.

Exercice 5 (Préservation, le retour) **:**
Soit $\mathcal{M}$ une $\mathcal{L}$-structure. On note $\mathcal{L}_M = \mathcal{L} \cup M$, $\mathcal{M}_M$ la $\mathcal{L}_M$-structure où chaque constante $m \in M$ est interprétée par elle-même, et $\Delta(M) = \{\varphi\ \mathcal{L}_M\text{-énoncé sans quantificateurs} : \mathcal{M}_M \vDash \varphi\}$.
Soit T une théorie, on note $T_\forall = \{\varphi \text{ énoncé universel} : T \vDash \varphi\}$.

1. Montrer qu'une $\mathcal{L}$-structure $\mathcal{N}$ est modèle de $\Delta(M)$ si et seulement si $\mathcal{M}$ est une sous-structure de $\mathcal{N}$ (à isomorphisme près).

2. Montrer que $\mathcal{N} \vDash T_\forall$ si et seulement si il existe $\mathcal{M}$ modèle de T telle que $\mathcal{N}$ est une sous-structure de $\mathcal{M}$.

3. En déduire que si T est stable par sous-structure, i.e. si $\mathcal{M} \vDash T$ et $\mathcal{N}$ sous-structure de $\mathcal{M}$, alors $\mathcal{N} \vDash T$, T est équivalente à $T_\forall$.

4. Soit φ un $\mathcal{L}$-énoncé, montrer que si φ est préservée par sur-structure (i.e. $\mathcal{M} \vDash \varphi$ et $\mathcal{M}$ sous-structure de $\mathcal{N}$, alors $\mathcal{N} \vDash \varphi$) alors φ est équivalente à un énoncé existentiel.

Exercice 6 (Types et nombres de modèles dénombrables) **:**

1. Soit T une théorie complète dans un langage dénombrable qui a des modèles infinis (et donc uniquement des modèles infinis). Un type $p[x_1, \ldots, x_n]$ est un ensemble de formules en les variables $x_1, \ldots, x_n$ qui soit consistant avec T, i.e. il existe un modèle $\mathcal{M}$ de T et des points $c_1, \ldots, c_n \in M$ tels que $\mathcal{M} \vDash \varphi[c_1, \ldots, c_n]$ pour tout $\varphi \in p$ (on dit alors que p est réalisé dans $\mathcal{M}$).

   Montrer qu'un ensemble de formules $p[x_1, \ldots, x_n]$ est un type de T si et seulement s'il est finiment consistant avec T (i.e. tout sous-ensemble fini de p est consistant avec T).

2. Soit $M \vDash T$, $A \subseteq M$ et $p[x_1, \ldots, x_n]$ un type de T, montrer que p est réalisé dans une extension élémentaire de $\mathcal{M}$.

3. Un type $p[x_1, \ldots, x_n]$ est dit isolé s'il existe une formule $\varphi[x_1, \ldots, x_n]$ (consistante avec T) telle que $T \vdash \varphi \to \psi$ pour tout $\psi \in p$. Montrer qu'un type isolé est réalisé dans tout modèle de T.

   De plus, montrer que si $p[\overline{x}, y]$ est isolé par φ et $\overline{a}$ est une réalisation de $\{\psi[\overline{x}] \in p\} \cup \{\exists y \varphi[\overline{x}, y]\}$ dans $\mathcal{M}$ alors on peut trouver c tel que $\overline{a}c$ réalise p.

4. Si $\mathcal{M} \vDash T$ et $c_1, \ldots, c_n \in M$, on note $\mathrm{tp}(c_1, \ldots, c_n) = \{\varphi[x_1, \ldots, x_n] : \mathcal{M} \vDash \varphi[c_1, \ldots, c_n]\}$.

   Montrer que $\mathrm{tp}(c_1, \ldots, c_n)$ est un type de T.

5. On dit que $\mathcal{M}$ est atomique si pour tout $c_1, \ldots, c_n \in M$, $\mathrm{tp}(c_1, \ldots, c_n)$ est isolé.

   Soit $\mathcal{M}$ et $\mathcal{N}$ atomiques et dénombrables, montrer que $\mathcal{M} \simeq \mathcal{N}$

   (Indication : on pourra construire une chaîne croissante d'isomorphismes partiels de domaine fini telle que l'union soit l'isomorphisme recherché.)

6. On admettra le résultat suivant : soit $p[x_1, \ldots, x_n]$ un type non isolé de T, il existe $\mathcal{M} \vDash T$ dénombrable tel que p n'est pas réalisé dans $\mathcal{M}$.

   En déduire que T est $\aleph_0$-catégorique (i.e. tous les modèles dénombrables de T sont isomorphes) si et seulement si tous les types de T sont isolés.

7. Montrer que si T n'est pas $\aleph_0$-catégorique alors pour tout $\mathcal{M} \vDash T$ et tout $c_1, \ldots, c_n \in M$, $\mathcal{D}(c_1, \ldots, c_n)$ n'est pas $\aleph_0$-catégorique (où $\mathcal{D}(c_1, \ldots, c_n)$ est le diagramme élémentaire).

8. Supposons que T n'est pas $\aleph_0$-catégorique, montrer que T a au moins 3 modèles dénombrables.

   (Indication : utiliser tout ce qu'on a démontré jusque là.)

On verra dans un prochain Td que ce minimum est effectif.

Exercice 7 (Qui sont ces charmants messieurs ?) **:**