Silvain Rideau
Bureau T5

silvain.rideau@ens.fr
www.eleves.ens.fr/home/srideau

Corrigé du TD de Logique 6

7 et 10 novembre 2014

Exercice 2 (Critère de Vaught) **:**
Soient $\mathcal{M}$ et $\mathcal{N} \models T$. En appliquant Löwenheim-Skolem descendant, on obtient $\mathcal{M}_\star \preccurlyeq \mathcal{M}$ et $\mathcal{N}_\star \preccurlyeq \mathcal{N}$ de cardinal $|\mathcal{L}|$. En appliquant ensuite Löwenheim-Skolen ascendant, on obtient $\mathcal{M}^\star \succcurlyeq \mathcal{M}_\star$ et $\mathcal{N}^\star \succcurlyeq \mathcal{N}_\star$ de cardinal κ. Par hypothèse, on a $\mathcal{N}^\star$ et $\mathcal{M}^\star$ isomorphes, en particulier $\mathcal{M}^\star \equiv \mathcal{N}^\star$. Comme une extension élémentaire implique en particulier d'être élémentairement équivalents, on a bien $\mathcal{M} \equiv \mathcal{M}_\star \equiv \mathcal{M}^\star \equiv \mathcal{N}^\star \equiv \mathcal{N}_\star \equiv \mathcal{N}$.
Je reconnais qu'on n'a pas vraiment besoin de quatre applications de Löwenheim-Skolem pour montrer ce résultat, mais sinon il faut faire des disjonctions de cas sur la taille de $\mathcal{M}$ et $\mathcal{N}$ par rapport à κ...

Exercice 3 (Espaces Vectoriels) **:**

1. La classe des K espaces vectoriels infinis est axiomatisée par les axiomes suivants :
   a) $\forall x \forall y \forall z\, (x+y)+z = x+(y+z) \wedge x+y = y+x \wedge x+0 = x$,
   b) $\forall x \forall y\, \lambda_k(x+y) = \lambda_k(x)+\lambda_k(y) \wedge \lambda_k(\lambda_{k'}(x)) = \lambda_{kk'}(x) \wedge \lambda_k(x)+\lambda_{k'}(x) = \lambda_{k+k'}(x)$, pour tout k et $k' \in K$,
   c) $\forall x \lambda_1 x = x$,
   d) $\exists x_1 \exists x_n \bigwedge_{i\neq j} x_i \neq x_j$.
2. Les sous structure de $\mathcal{V}$ sont exactement les sous-espaces vectoriels, ils doivent être clos par somme et par tous les λ_k.
3. Deux espaces vectoriels sont isomorphes si et seulement s'ils ont la même dimension (où la dimension est le cardinal potentiellement infini d'une base). Si $\mathcal{U}$ est un k-espace vectoriel de cardinal $\kappa > |k|$, si λ est sa dimension, alors est isomorphe à $K^{(\lambda)}$, les familles presque toujours nulles d'éléments de K indexées par λ dont le cardinal est $\lambda|K|$ qui doit être égal à $\kappa > |K|$. Il s'en suit immédiatement que comme κ est infini, on a $\lambda = \kappa$.

   Ainsi deux modèles de T de cardinal $\kappa > |K|$ ont même dimension et sont donc isomorphes. Comme T n'a que des modèles infinis, d'après le critère de Vaught (voir exercice 2), T est complète.
4. Soit T la théorie suivante :
   a) les axiomes de groupes abéliens,
   b) $\exists x, x \neq 0$,
   c) pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'axiome $(\forall x \exists y) y + \dots + y = x$, où y apparaît n fois.

   Il est clair que $T \subset \mathrm{Th}(\mathcal{Q})$. Pour conclure que cette théorie axiomatise $Th(\mathcal{Q})$, il suffit de montrer que T est une théorie complète. Pour cela, on remarque que les groupes abéliens divisibles sont exactement les $\mathbb{Q}$-espaces vectoriels (si V est un $\mathbb{Q}$-espace vectoriel, c'est a fortiori un groupe abélien divisible, et réciproquement un groupe abélien divisible admet une unique structure de $\mathbb{Q}$-espace vectoriel). Ainsi, si φ est un énoncé dans le langage $\{0, +\}$, alors φ est conséquence de T si et seulement s'il est conséquence de la théorie des $\mathbb{Q}$-espaces vectoriels non nuls. Comme cette dernière est complète par les résultats précédents, on en déduit que T est complète.
5. Par le théorème de Löwenheim-Skolem ascendant, il existe $\mathcal{V} \preccurlyeq \mathcal{U}'$ tel que $\mathcal{U}'$ a le même cardinal que $\mathcal{U}$ (et donc la même dimension). Comme cette dimension est strictement plus grande (et infinie) que celle de $\mathcal{V}$, il s'en suit que les supplémentaires de $\mathcal{V}$ dans $\mathcal{U}$ et $\mathcal{U}'$ sont de même dimension et sont donc isomorphes. Ainsi il existe un isomorphisme de $\mathcal{U}'$ dans $\mathcal{U}$ qui fixe $\mathcal{V}$. Comme $\mathcal{U}' \models \mathcal{D}(\mathcal{V})$, il s'en suit que $\mathcal{U}$ aussi et donc qu'on a bien $\mathcal{V} \preccurlyeq \mathcal{U}$.
6. Par Löwenheim-Skolem ascendant, on peut trouver $\mathcal{U} \preccurlyeq \mathcal{U}'$ avec $\mathcal{U}'$ de cardinal assez grand pour que les hypothèse de la question précédente sur la dimension soient vérifiées. On a alors $\mathcal{V} \preccurlyeq \mathcal{U}'$ et donc par l'exercice 1, $\mathcal{V} \preccurlyeq \mathcal{U}$.

Exercice 4 (Théorème d'union de chaîne de Tarski) **:**

1. Soit f un symbol de fonction du langage $\mathcal{L}$. Pour tout element $m \in M$, il existe $i \in I$ tel que $m \in M_i$, comme l'ordre sur I est filtrant, quitte à prendre un i plus grand, pour tout uple $\overline{m} \in M$, on trouve aussi $i \in I$ tel que $\overline{m} \in M_i$. On pose alors $f^M(\overline{m}) = f^{M_i}(\overline{m})$. Montrons que cette définition ne dépend pas du choix de i. Soit j tel que $\overline{m} \in M_j$ et k tel que $i \leqslant k$ et $j \leqslant k$. Comme M_i et M_j sont des sous-structure de M_k, on a $f^{M_i}(\overline{m}) = f^{M_k}(\overline{m}) = f^{M_j}(\overline{m})$.

   De façon similaire, pour tout prédicat P de $\mathcal{L}$, on pose $M \vDash P(\overline{m})$ si et seulement si $M_i \vDash P(\overline{m})$ pour tout i tel que $\overline{m} \in M_i$, et cette définition ne dépend pas du choix de i. On a alors, par définition que, pour tout i, M_i est une sous-structure de M.

2. On montre par induction sur $\varphi(\overline{x})$ que pour tout $i \in I$ et $\overline{m} \in M_i$ on a $M \vDash \varphi(\overline{m})$ si et seulement si $M_i \vDash \varphi(\overline{m})$. Si φ est atomique c'est une conséquence immédiate du fait que M_i est une sous-structure de M. Il est évident que si l'hypothèse d'induction est vraie pour φ elle l'est aussi pour $\neg\varphi$ et si elle est vraie pour φ et ψ, elle est vraie pour $\varphi \wedge \psi$. Il suffit donc de montrer le cas où $\varphi(\overline{x}) = \exists y\, \psi(\overline{x}, y)$.

   Soit $i \in I$ et $\overline{m} \in M_i$. Supposons que $M_i \vDash \exists y\, \psi(\overline{m}, y)$. Il existe alors $n \in M_i$ tel que $M_i \vDash \psi(\overline{m}, n)$. Par induction, on a alors $M \vDash \psi(\overline{m}, n)$ et donc $M \vDash \exists y\, \psi(\overline{m}, y)$. Réciproquement, supposons que $M \vDash \exists y\, \psi(\overline{m}, y)$. Il existe donc $n \in M$ tel que $M \vDash \psi(\overline{m}, n)$. Comme I est filtrant, il existe $j \geqslant i$ tel que $n \in M_j$. Par induction, on a $M_j \vDash \psi(\overline{m}, n)$ et donc $M_j \vDash \exists y\, \psi(\overline{m}, y)$. Comme $M_i \preccurlyeq M_j$, il s'en suit que $M_i \vDash \exists y\, \psi(\overline{m}, y)$.

Exercice 5 (Théorème de consistance de Robinson) **:**
Je me suis rendu compte en faisant la correction qu'il me manquait un lemme que je pensait être une conséquence de la question 2. J'ai donc rajouté une nouvelle question 1 dans l'exercice.

1. Montrons que la théorie $T_1 \cup \mathcal{D}_{\mathcal{L}}(M)$ est consistante (où les nouvelles constantes pour les éléments de M sont choisis disjointes des constantes de $\mathcal{L}_1$). Si elle ne l'était pas, par compacité (et le fait que $\mathcal{D}_{\mathcal{L}}(M)$ est close par conjonction), il existerait une $\mathcal{L}$-formule φ et un uple $\overline{m} \in M$ tel que $M \vDash \varphi(\overline{m})$ et $T_1 \vDash \neg\varphi(\overline{m})$. Comme les contantes $\overline{m}$ n'apparaissent pas dans T_1, on a alors $T_1 \vDash \forall \overline{x}\, \neg\varphi(\overline{x})$. Comme $T \subseteq T_1$, on ne peut pas avoir $T \vDash \neg(\forall \overline{x}\, \neg\varphi(\overline{x}))$. Comme T est complète, on a donc $T \vDash \forall \overline{x}\, \neg\varphi(\overline{x})$ et donc $M \vDash \forall \overline{x}\, \neg\varphi(\overline{x})$, ce qui est absurde.

   Soit donc $A \vDash T_1 \cup \mathcal{D}_{\mathcal{L}}(M)$. On a bien M qui se plonge élémentairement dans $A|_{\mathcal{L}}$ et donc, quitte à renommer les points de M dans A, $M \preccurlyeq A|_{\mathcal{L}}$.

2. Soit $\mathcal{L}(M)$ un langage ou on rajoute une constante pour chaque point de M. On considèrera $\mathcal{L}(A)$ comme un sous-langage de $\mathcal{L}(M)$ (et on ne considère donc pas que les symboles de constante que l'on rajoute dans $\mathcal{L}(A)$ sont complètement nouveaux). Montrons que la théorie $\mathcal{D}_{\mathcal{L}_1}(A) \cup \mathcal{D}_{\mathcal{L}}(M)$ est consistante. Si elle ne l'était pas, par le théorème de compacité, il existerait une $\mathcal{L}$-formule $\varphi(\overline{x}, \overline{y})$, un uple $\overline{a} \in A$ et un uple $\overline{m} \in M \setminus A$ tels que $M \vDash \varphi(\overline{a}, \overline{m})$ et $\mathcal{D}_{\mathcal{L}_1}(A) \vDash \neg\varphi(\overline{a}, \overline{m})$. Comme les constantes $\overline{m}$ n'apparaissent pas dans $\mathcal{D}_{\mathcal{L}_1}(A)$, on a $\mathcal{D}_{\mathcal{L}_1}(A) \vDash \forall \overline{y}\, \varphi(\overline{a}, \overline{y})$ et donc $A \vDash \forall \overline{y}\, \varphi(\overline{a}, \overline{y})$. Comme $A|_{\mathcal{L}} \preccurlyeq M$, on a aussi $M \vDash \forall \overline{y}\, \varphi(\overline{a}, \overline{y})$, ce qui est absurde.

   Soit donc $B \vDash \mathcal{D}_{\mathcal{L}_1}(A) \cup \mathcal{D}_{\mathcal{L}}(M)$, quitte à renommer des points, on peut supposer $M \subseteq B$ (et que les constantes de $\mathcal{L}(M)$ sont interprétées exactement comme dans M). On a donc $A \preccurlyeq B$ et $M \preccurlyeq B|_{\mathcal{L}}$.

3. Soit $A_0 \vDash T_2$. Par la question 1, il existe $B_0 \vDash T_1$ tel que $A_0|_{\mathcal{L}} \preccurlyeq B_0|_{\mathcal{L}}$. Par la question 2, on construit par récurrence A_{i+1} tel que $A_i \preccurlyeq A_{i+1}$ et $B_i|_{\mathcal{L}} \preccurlyeq A_{i+1}|_{\mathcal{L}}$ ainsi que B_{i+1} tel que $B_i \preccurlyeq B_{i+1}$ et $A_{i+1}|_{\mathcal{L}} \preccurlyeq B_i|_{\mathcal{L}}$ (l'existence des B_i est une conséquence de la question 2 où l'on remplace T_1 par T_2).

   Soit alors $M = \bigcup_i A_i = \bigcup_i B_i$ qui est munie d'une $\mathcal{L}_1 \cup \mathcal{L}_2$-structure comme à l'exercice précédent. Cette $\mathcal{L}_1 \cup \mathcal{L}_2$-structure car les structures $A_i|_{\mathcal{L}_1 \cap \mathcal{L}_2}$ et $B_i|_{\mathcal{L}_1 \cap \mathcal{L}_2}$ forment aussi une chaîne. Par le théorème d'union de chaîne de Tarski $A_0 \preccurlyeq M|_{\mathcal{L}_2}$ et $B_0 \preccurlyeq M|_{\mathcal{L}_1}$. On a donc bien $M \vDash T_1 \cup T_2$.

Exercice 6 (La préservation contre-attaque) **:**

1. Supposons tout d'abord que tout modèle de T se plonge dans un modèle de T'. Soit $\varphi \in T'_\forall$ et $M \vDash T$. Il existe $N \vDash T'$ tel que $M \subseteq N$. Comme $N \vDash T'$, on a $N \vDash \varphi$, et comme φ est universelle, on a aussi $M \vDash \varphi$.

   Réciproquement, supposons que $T'_\forall \subseteq T_\forall$ et soit M un modèle de T. On a donc $M \vDash T_\forall$ et donc $M \vDash T'_\forall$. On a vu au Td 6, que les modèles de $T'_\forall$ sont exactement les sous-structures des modèles de T'.

2. Par la question précédente, il suffit de montrer que si $(X, <)$ et $(Y, <)$ sont des ordres stricts totaux infinis, il existe $Z \equiv Y$ tel que $X \subseteq Z$. Il faut donc montrer que $\mathrm{Th}(Y) \cup \Delta(X)$, où $\Delta(X)$ est le diagramme sans quantificateurs de X, est consistante. Une partie finie de cette théorie est incluse dans $\mathrm{Th}(Y) \cup \Delta(X_0)$ où X_0 est une partie de X. Une partie finie d'un ordre strict total est toujours isomorphe à $(n, <)$ où n est le cardinal de X_0. Il suffit donc de trouver dans Y une chaîne de longueur n, ce qui est possible car Y est infini.

3. Montrons que $T_\forall$ est la théorie des anneaux commutatifs unitaires intègres. On peut tout d'abord vérifié que dans le langage $\{+, -, 0, \times, 1\}$, la théorie des anneaux commutatifs unitaires intègres est universelle (et c'est bien une conséquence de la théorie des corps algébriquement clos). Réciproquement tout anneau commutatif unitaire intègre A se plonge dans la clôture algébrique de son anneau de fractions, qui est bien un modèle d'ACF.

Exercice 7 (Relation d'équivalence) **:**

1. La théorie T contient :
   - $\forall x \forall y \forall z \, ((xEy \wedge yEz) \to xEy) \wedge (xEy \to yEx) \wedge xEx$,
   - Pour tout $n \in \mathbb{N}_{>0}$, $\exists x_1 \dots \exists x_n \bigwedge_{i \neq j} \neg x_i E x_j$,
   - Pour tout $n \in \mathbb{N}_{>0}$, $\forall x \exists y_1 \dots \exists y_n \bigwedge_i xEy_i \wedge \bigwedge_{i \neq j} y_i \neq y_j$.

2. Soit $M \vDash T$ un modèle dénombrable. Chaque classe de M est dénombrable et il y a un nombre dénombrable de classes, donc $M \simeq \mathbb{N}^2$ muni de la relation $(x_1, y_1)E(x_2, y_2)$ si et seulement si $x_1 = x_2$. On conclut alors que T est complète par le critère de Vaught.

3. Soit $M \vDash T$ un modèle de cardinalité $\aleph_1$. Il y a donc $\aleph_0$ ou $\aleph_1$ classes d'équivalence.

   Supposons qu'il y ait $\aleph_0$ classes d'équivalence. Il faut donc qu'une de ces classes soit de cardinal $\aleph_1$. Comme les classes sont soit de cardinal $\aleph_0$ soit de cardinal $\aleph_1$, seuls les cas suivants sont possibles (et aucun n'est isomorphe) :
   - Il y a un nombre fini (non nul) de classes de cardinal $\aleph_1$, et donc $\aleph_0$ classes de cardinal $\aleph_0$;
   - Il y a un nombre fini (possiblement nul) de classes de cardinal $\aleph_0$, et donc $\aleph_0$ de classes de cardinal $\aleph_1$;
   - Il y a $\aleph_0$ classes de cardinal $\aleph_0$ et $\aleph_0$ classes de cardinal $\aleph_1$.

   S'il y a $\aleph_1$ classes d'équivalences les cas suivant sont possibles :
   - Il y a un nombre fini (possiblement nul) de classes de cardinal $\aleph_1$, et donc $\aleph_1$ classes de cardinal $\aleph_0$;
   - Il y a un nombre fini (possiblement nul) de classes de cardinal $\aleph_0$, et donc $\aleph_1$ de classes de cardinal $\aleph_1$;
   - Il y a $\aleph_1$ classes de cardinal $\aleph_0$ et $\aleph_0$ classes de cardinal $\aleph_1$.
   - Il y a $\aleph_0$ classes de cardinal $\aleph_0$ et $\aleph_1$ classes de cardinal $\aleph_1$.
   - Il y a $\aleph_1$ classes de cardinal $\aleph_0$ et $\aleph_1$ classes de cardinal $\aleph_1$.

   Il y a donc en tout $\aleph_0$ modèles de T de cardinal $\aleph_1$ à isomorphism près.

Exercice 8 (λ-modèles) **:**

1. Soit $\mathcal{M}$ un modèle infinie de λ. Pour chaque formule φ telle que $\{\bar{c} \in M : \mathcal{M} \vDash \varphi[\bar{c}]\}$ est infini, on pose C_φ un ensemble de nouveaux uplets de constantes de cardinal λ et on note $\mathcal{L}'$ le nouveau langage obtenu en rajoutant toutes ces constantes. Comme il y $|\mathcal{L}|$ $\mathcal{L}$-formules et que les uplets sont finis, le cardinal de $\mathcal{L}'$ est $|\mathcal{L}|\lambda = \lambda$. On note $T' \supseteq T \cup \{\varphi[\bar{c}_\varphi]\}$ la théorie qui dit que tous les uplets de constantes $\bar{c}_\varphi$ sont distincts.

   Comme on a rajouté des constantes justement pour les ensembles définissables infinis, T' est finiment consistante et par Löwenheim-Skolem, elle a des modèles de cardinal λ. Soit $\mathcal{N}$ un de ces modèles.

   Comme tous les ensembles définissables infinis de $\mathcal{N}$ sont de cardinal au moins λ mais que $|N| = \lambda$, ils sont en fait de cardinal exactement λ et $\mathcal{N}$ est bien un λ-modèle.

2. Soit $\mathcal{M}$ et $\mathcal{N}$ deux modèles de T (nécessairement infinis). Par Löwenheim-Skolem descendant, il existe $\mathcal{M}_1 \preccurlyeq \mathcal{M}$ et $\mathcal{N}_1 \preccurlyeq \mathcal{N}$ tel que $|M_1|$ et $|N_1|$ soit inférieurs à λ. En appliquant la question précédente à $\mathcal{D}(\mathcal{M}_1)$ et $\mathcal{D}(\mathcal{N}_1)$ respectivement, on trouve deux λ-modèles $\mathcal{M}_2$ et $\mathcal{N}_2$ tels que $\mathcal{M}_1 \preccurlyeq \mathcal{M}_2$ et $\mathcal{N}_1 \preccurlyeq \mathcal{N}_2$. On a alors $\mathcal{M} \equiv \mathcal{M}_1 \equiv \mathcal{M}_2 \simeq \mathcal{N}_2 \equiv \mathcal{N}_1 \equiv \mathcal{N}$.

3. Soit $\mathcal{M}$ un modèle de cardinal λ de T. Comme à la question précédente, on peut trouver $\mathcal{M} \preccurlyeq \mathcal{N}$ qui soit un λ-modèle. Mais comme T est λ-catégorique, il s'en suit que $\mathcal{M} \simeq \mathcal{N}$ est déjà un λ-modèle.

Exercice 9 (Qui sont ces charmants messieurs ?) **:**
De gauche à droite : Vaught, Robinson et Tarski.