Silvain Rideau
Bureau T5
silvain.rideau@ens.fr
www.eleves.ens.fr/home/srideau

Corrigé du TD de Logique 7 (Élimination des quantificateurs)

13 et 17 novembre 2014

Exercice 1 (Ordres linéaires denses) **:**

1. Soit $\mathcal{M}$ et $\mathcal{N} \vDash T$ et A une sous-structure commune, $\varphi[x,\overline{y}]$ une $\mathcal{L}$-formule sans quantificateurs et $\overline{a} \in A$. Par forme normale disjonctive, φ est équivalente à une formule de la forme $\bigvee_k \varphi_k$ où φ_k est de la forme :
$$\bigwedge_{j=1}^{l_1^k} x < a_{i_{j,k,1}} \bigwedge_{j=1}^{l_2^k} \neg x < a_{i_{j,k,2}} \bigwedge_{j=1}^{l_3^k} a_{i_{j,k,3}} < x \bigwedge_{j=1}^{l_4^k} \neg a_{i_{j,k,4}} < x \bigwedge_{j=1}^{l_5^k} x = a_{i_{j,k,3}} \bigwedge_{j=1}^{l_6^k} x \neq a_{i_{j,k,6}} \wedge \psi_k[\overline{a}].$$
Comme $\neg x < y$ est équivalent à $x > y \vee x = y$ quitte à agrandir k, on peut supposer que l_2^k et l_4^k sont nuls. De même $x \neq y$ est équivalent à $x < y \vee x > y$ et donc on peut supposer que $l_6^k = 0$. Supposons maintenant qu'il existe $c \in M$ tel que $\mathcal{M} \vDash \varphi[c,\overline{a}]$, il existe donc k tel que $\mathcal{M} \vDash \varphi_k[c,\overline{a}]$. Il suffit donc de montrer qu'il existe $d \in N$ tel que $\mathcal{N} \vDash \varphi_k[d,\overline{a}]$. On peut donc supposer que φ est de la forme :
$$\bigwedge_{j=1}^{l_1^k} x < a_{i_{j,k,1}} \bigwedge_{j=1}^{l_2^k} a_{i_{j,k,2}} < x \bigwedge_{j=1}^{l_3^k} x = a_{i_{j,k,3}} \wedge \psi_k[\overline{a}].$$
Si $l_3^k > 0$, on a $c \in A \subseteq N$ et donc il suffit de prendre $d = c$. On peut donc supposer que $l_3^k = 0$. Soit alors $a_{i_1} = \max\{a_i : a_i < c\} \cup \{-\infty\}$ et $a_{i_2} = \min\{a_i : c < a_i\} \cup \{\infty\}$. On a alors que $a_{i_1} < x < a_{i_2}$ implique $\varphi[x,\overline{a}]$ et donc comme l'ordre est dense sans extrémités, on trouve facilement $d \in N$ tel que $a_{i_1} < d < a_{i_2}$.

2. Soient $\mathcal{M}$ et $\mathcal{N} \vDash T$ dénombrables. Notons $M = \{m_i : i \in \mathbb{N}\}$ et $M = \{n_i : i \in \mathbb{N}\}$. On construit alors par récurrence une fonction f_i strictement croissante d'un sous-ensemble fini de M vers un sous ensemble de N telle que pour tout i :
   - m_i est dans le domaine de f_{2i} ;
   - n_i est dans l'image de f_{2i+1}.

   Pour construire une telle fonction, par symétrie, il suffit de montrer que tout $\overline{a} \in M$, f strictement croissante de domaine $\overline{a}$ et d'image incluse dans N et pour tout $c \in M$, on peut étendre f en une fonctions strictement croissante dont le domaine contient c, mais on peut procéder exactement comme dans la question précédente.

   On prend alors $f = \bigcup_i f_i$ qui est une fonction strictement croissante de domaine M et d'image N, i.e. une isomorphisme entre $\mathcal{M}$ et $\mathcal{N}$.

3. On peut conclure soit par le critère de Vaught, soit par le fait que l'ordre à un élément est une sous-structure de tout ordre (en particulier de ceux qui sont linéaire dense sans extrémités).

4. $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}$ sont tous deux des ordres linéaires denses sans extrémités et $(\mathbb{Q},<)$ est une sous-structure de $(\mathbb{R},<)$, on peut donc conclure par élimination des quantificateurs.

5. Soit $\varphi[\overline{x}]$ une $\mathcal{L}_1$-formule, alors il existe une $\mathcal{L}$-formule $\psi[\overline{x},\overline{y}]$ et un uplet $\overline{c}$ de nouvelles constantes telles que $\varphi[\overline{x}] = \psi[\overline{x},\overline{c}]$. Comme T élimine les quantificateurs, il existe une $\mathcal{L}$-formule sans quantificateurs θ telle que $\psi \iff \theta$ et donc φ est équivalente à $\theta[\overline{x},\overline{c}]$.

   La complétude est maintenant immédiate parce que tout modèle de T contient la sous-structure formée de la chaîne des c_i. Pour ce qui est des modèles dénombrables, il y a clairement au mois trois types de modèles dénombrables, ceux ou les c_i sont non bornés, ceux ou les c_i sont bornés mais n'ont pas de borne supérieure et ceux ou les c_i ont une borne supérieure. Dans les trois cas il est facile d'étendre progressivement la fonctions qui envoie l'interprétation des c_i sur l'interprétation des c_i en un isomorphisme.

6. La théorie des ordres denses avec plus grand élément (mais pas de plus petit) n'élimine pas les quantificateurs. En effet $M_1 = \{q \in \mathbb{Q} : q \leqslant 0\}$ est une sous structure de $M_2 = \{q \in \mathbb{Q} : a \leqslant 1\}$ et ce sont tous les deux des ordres denses avec maximum mais pas minimum mais ce n'est pas une sous structure élémentaire, en effet $M_1 \vDash \forall x,\, x \leqslant 0$ mais ce n'est pas le cas dans M_2. Par contre si on rajouter une constante pour le plus grand élément, alors on peut montrer comme à la question 1 qu'on a élimination des quantificateurs. De même s'il y a un plus petit élément.

Exercice 2 (Groupes ordonnés divisibles) **:**

1. La théorie T contient les axiomes suivants :
   - La théorie des groupes abéliens $\forall xyz,\ (x+y)+z = x+(y+z) \wedge x+y = y+x \wedge x+(-x) = 0 \wedge x+0 = x$;
   - $\forall xyz,\ x < y \to x+z \to y+z$;
   - Pour tout $n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$, $\forall x \exists y,\ x+\ldots+x = y$ où x apparait n fois dans la somme ;
   - $\exists x,\ x \neq 0$.

2. Supposons que $x \neq 0$, quitte à remplacer x par $-x$ on peut supposer que $x > 0$. On a alors $(n+1)\cdot x > n \cdot x$ et donc si $n \neq 0$, $n \cdot x > 0$.

3. Soit G un groupe divisible sans torsion. Soit x, y et $z \in G$ et $n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$ tels que $n \cdot y = n \cdot z = x$. On a alors $n \cdot (y-z) = 0$ et donc comme Gest sans torsion $y = z$. Pour tout $n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$, x/n est bien défini. Pour tout $p/q \in \mathbb{Q}$, on pose alors $p/q \cdot x = p \cdot (x/q)$ (c'est bien définit). On peut vérifier que cela fait bien de G un $\mathbb{Q}$-espace vectoriel.

4. Soit $x \in \mathrm{Div}(A)$ et $n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$, comme G est divisible, il existe $y \in G$ tel que $n \cdot y = x \in A$. Comme $x \in \mathrm{Div}(A)$, il existe m tel que $m \cdot x \in A$ et donc $nm \cdot y \in A$. Par définition de $\mathrm{Div}(A)$, $y \in \mathrm{Div}(A)$ et donc $\mathrm{Div}(A)$ est bien divisible.

5. Soit $y \in \mathrm{Div}(A)$ et $n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$ tel que $n \cdot y \in A$, on pose alors $g(y) = f(n \cdot y)/n$ (c'est bien défini). Il est alors facile de vérifier que g est bien un morphisme de groupe. De plus, on peut montrer (par récurrence) que si $x < y$ alors $x/n < y/n$. Il s'en suit donc que g est aussi strictement croissant.

6. Soit x et $y \in G$ tels que $x < y$, on a alors $x = x/2 + x/2 < (x+y)/2 < y/2 + y/2 = y$. On démontre de même que G est sans extrémités (si $x > 0$ alors $-x < x < 2x$, si $x < 0$ alors $2x < x < -x$ et comme le groupe est non nul il y a bien des éléments plus grands et plus petits strictement que 0).

7. On va montrer que pour tout $\mathcal{M}$ et $\mathcal{N} \models T$, tous $\overline{a} \in M$ et $\overline{b} \in N$ vérifiant les même formules sans quantificateurs, toute $\mathcal{L}$-formule $\varphi[x,\overline{y}]$ sans quantificateurs et $c \in M$ tel que $\mathcal{M} \models \varphi[c,\overline{a}]$ il existe $\mathcal{N}^\star \succcurlyeq \mathcal{N}$ et $d \in N^\star$ tels que $\mathcal{N}^\star \models \varphi[d,\overline{b}]$ (ce qui implique bien que $\mathcal{N} \models \exists x,\ \varphi[x,\overline{b}]$). Comme $\overline{a}$ et $\overline{b}$ vérifient les même formules sans quantificateurs, le groupe A engendré par $\overline{a}$ et le groupe B engendré par $\overline{b}$ sont isomorphes (par un isomorphisme qui envoie $\overline{a}$ sur $\overline{b}$) en tant que groupes ordonnés. Il s'en suit qu'on peu étendre cet isomorphisme en $f : \mathrm{Div}(A) \to \mathrm{Div}(B)$ par la question 5. Si c est dans $\mathrm{Div}(A)$, il suffit de prendre $\mathcal{N} = \mathcal{N}^\star$ et $d = f(c)$. Maintenant, si $c \notin \mathrm{Div}(A)$, définissons $G_c = \{a \in \mathrm{Div}(A) : a < c\}$ et $D_c = \{a \in \mathrm{Div}(A) : c < a\}$ et considérons la théorie (dans le language $\mathcal{L}_N \cup \{d\}$ où d est une nouvelle constante) $T_1 = \mathcal{D}(\mathcal{N}) \cup \{f(a) < d : a \in G_c\} \cup \{d < f(a) : a \in D_c\}$. Par compacité, cette théorie est consistante si et seulement toute sous-théorie T^0 finie l'est, or une sous-théorie finie de T_1 est inclue dans $\mathcal{D}(\mathcal{N}) \cup \{f(a) < d :\in G^0\} \cup \{d < f(a) : a \in D^0\}$ où $G^0 \subseteq G_c$ est fini et $D^0 \subseteq D_c$ est fini. Comme f est un isomorphisme de groupe ordonné, les éléments de G^0 sont tous plus petits que les éléments de D^0 et donc par un argument vue maintes fois dans ce Td, on peut trouver un point dans N (qui est un ordre dense sans extrémités) tel que si on interprète d dans $\mathcal{N}$ par ce point, on obtienne un modèle de T^0. Il existe donc $\mathcal{N}^\star$ et $d \in N^\star$ tel que $d < f(a)$ si et seulement si $c < f(a)$. De plus comme $\mathrm{Div}(A)$ est un sous $\mathbb{Q}$-espace vectoriel isomorphe à $\mathrm{Div}(B)$, $c \notin \mathrm{Div}(A)$ et $d \notin \mathrm{Div}(B)$, on peut étendre f en temps qu'isomorphisme de $\mathbb{Q}$-espace vectoriel à l'espace engendré par $\mathrm{Div}(()A)$ et c en envoyant c sur d. Cette extension g est en particulier un morphisme de groupes.

   Il suffit alors de montrer que g est aussi un isomorphisme pour l'ordre et on aura alors bien $\mathcal{N}^\star \models \varphi[d,\overline{b}]$ comme φ est sans quantificateurs. Soit $x = a_x + p/q \cdot c$ et $y = a_y + u/v \cdot c$ dans $\mathrm{Div}(A) \oplus \mathbb{Q}\,c$ tels que $x < y$ et donc $s/t \cdot c = (p/q - u/v) cdotc < a_x - a_y = a$. Si s et t sont tous deux positifs, on a alors $c < t/s \cdot a$ et donc $d < t/s \cdot f(a)$ ce qui implique $s/t \cdot d < f(a)$ et donc $g(x) = f(a_x) + p/q \cdot d < f(a_y) + u/v \cdot d = g(y)$. Si $p > 0$ et $q < 0$ le calcul est le même sauf que $s/t \cdot c > a$ et donc $s/t \cdot d > f(a)$. Enfin, si $p = 0$ c'est évident.

   On a donc montré (modulo quelques résultats du cours) que T élimine les quantificateurs. Il s'en suit immédiatement que T est complète parce que tous ces groupes contiennent le groupe nul comme sous-structure.

8. Soient $\overline{g} \in G$ et $\varphi[x,\overline{y}]$ une $\mathcal{L}$-formule (que l'on peut supposer sans quantificateurs par la question précédente). La formule $\varphi[x,\overline{g}]$ est alors équivalente à une formule de la forme $\bigvee_k \varphi_k$ où φ_k est de la forme

$$\bigwedge_{j=1}^{l_1^k} x < g_{j,k,1} \bigwedge_{j=1}^{l_2^k} g_{j,k,2} < x \bigwedge_{j=1}^{l_3^k} x = g_{j,k,3} \wedge \psi_k[\overline{y}],$$

où les $g_{j,k,n}$ sont dans le groupe engendré par $\overline{g}$ (voir question 1 de l'exercice 7, et un peu plus de travail pour faire disparaître les + et les −). Il suffit alors de montrer que $\varphi_k[x,\overline{g}]$ définit un point ou un intervalle. Si $l_3^k \neq 0$, $\varphi_k[x,\overline{g}]$ est réduit à un point. Si $l_3^k = 0$, alors en prenant $g_1 = \min\{g_{j,k,1}\} \cup \{\infty\}$ et $g_2 = \max\{g_{j,k,2}\} \cup \{-\infty\}$ alors $\varphi_k[x,\overline{g}]$ définit l'interval (g_1, g_2).

9. On procède par récurrence sur n. Si $n = 1$, par la question précédente, $\varphi[x,\overline{g}]$ est une union d'intervalles et de points, de plus comme on l'a vu à la question précédente, les bornes (finies) de ces intervalles et les points sont dans le groupe engendré par $\overline{g}$ (en particulier ils sont définissables sur $\overline{g}$). S'il y a un nombre non nul de points dans la description précédente, on a finit. S'il y a un intervalle dont les deux bornes g_1 et g_2 sont finies, il suffit de prendre $(g_1 + g_2)/2$. S'il y a un intervalle (g_1, ∞) avec g_1 non nul, il suffit de prendre $2g_1$ ou $-g_1$ suivant le signe de g_1 (et symétriquement pour $(-\infty, g_2)$). S'il y a l'intervalle $(0,\infty)$ ou $(-\infty, 0)$, il suffit de choisir g_i ou $-g_i$ ou $g_i \neq 0$. Et enfin s'il n'y a que l'intervalle $(-\infty,\infty)$, on peut prendre 0.

   Supposons maintenant la propriété vraie pour n. On applique le cas que l'on vient de démontrer à la formule $\exists x_1 \dots x_n \varphi[x_1,\dots,x_n,x_{n+1},\overline{g}]$ pour obtenir h dans le groupe engendré par $\overline{g}$ tel que $G \vDash \exists\varphi[x_1,\dots,x_n,h,\overline{g}]$. Par induction on obtient alors $h_1 \dots h_n$ dans le groupe engendré par $\overline{g}$ (et h) tel que $G \vDash \varphi[h_1,\dots,h_n,h,\overline{g}]$ et on a fini.

10. Cela découle de la question précédente par compacité. Soit T_1 la théorie $T \cup \{\exists\overline{x}\varphi[\overline{x},\overline{g}]\} \cup \{\forall\overline{x}(\psi[\overline{x},\overline{g}] \to \neg\varphi[\overline{x},\overline{g}]) : \psi$ définit une fonction de $\overline{y}\}$ où les g_i sont de nouvelles constantes. Si cette théorie est consistante, on trouve $G \vDash T$ et $\overline{g} \in G$ tels que $\varphi[\overline{x},\overline{g}]$ définit un ensemble non vide dans G (et donc $\overline{g}$ n'est pas nul) mais qui ne contient aucun point définissable sur $\overline{g}$, ce qui contredit la question précédente. Il s'en suit donc par compacité que T_1 est finement inconsistante et donc qu'il existe ψ_i pour $i = 0 \dots k$ tels que

$$T \vDash \forall\overline{y}(\exists\overline{x}\varphi[\overline{x},\overline{y}] \to \bigvee_i \exists\overline{x},\ \psi_i[\overline{x},\overline{y}] \wedge \varphi[\overline{x},\overline{y}]).$$

   Remarquez qu'on a appliqué ici le fait que si une théorie implique un énoncé contenant des constantes qui n'apparaissent pas dans la théorie, alors on peut remplacer ces constantes par une quantification universelle. On peut alors définit la fonction f qui associe à $\overline{g}$ le résultat de la plus petite fonction f_i (définie par ψ_i) en $\overline{g}$ qui soit dans $\varphi[\overline{x},\overline{g}]$ quand cet ensemble est non vide et zéro sinon.

Exercice 3 (Graphe aléatoire) **:**

1. La théorie T des graphes aléatoires est donnée par les axiomes suivants :
   - L'antiréflexivité et la symétrie de R : $\forall x\, \neg xRx \wedge \forall x \forall y\ (xRy \to yRx)$,
   - Un schéma d'axiomes, indexé par n et $m \in \mathbb{N}$ pour le caractère aléatoire :

$$\forall x_1 \dots \forall x_n \forall y_1 \dots \forall y_m \left(\bigwedge_{i,j} \neg x_i = y_j \to \exists z[\bigwedge_i zRx_i \bigwedge_j \neg zRy_j] \right)$$

   On peut remarquer que le caractère aléatoire tel qu'énoncé dans le sujet implique qu'il existe un tel z qui ne soit pas dans $S_1 \cup S_2$. En effet, soit t qui et relié à tous les points de $S_1 \cup S_2$ et z qui est relié aux points de S_1 mais pas à $S_2 \cup \{t\}$. Ce z ne peut alors pas être dans $S_1 \cup S_2$ sinon il serait relié à t. On aurait donc aussi pu prendre comme axiome :

$$\forall x_1 \dots \forall x_n \forall y_1 \dots \forall y_m \bigwedge_{i,j} \neg x_i = y_j \to [\exists z \bigwedge_i \neg z = x_i \bigwedge_j \neg z = y_j \bigwedge_i zRx_i \bigwedge_j \neg zRy_j]$$

2. Soit $\mathcal{G}$ un graphe au plus dénombrable. On peut remarquer que l'ensemble des parties finies de G, noté $\mathfrak{P}^f(G)$, est lui aussi un ensemble au plus dénombrable car $\bigcup_n G^n$ se surjecte sur cet ensemble. On muni alors $G' = G \sqcup \mathfrak{P}^f(G)$ d'une structure de graphe en posant :
   - Pour tout $x, y \in G$, $xR^{\mathcal{G}'}y$ si et seulement si $xR^{\mathcal{G}}y$,
   - Pour tout $x \in G$ et $y \in \mathfrak{P}^f(G)$, $xR^{\mathcal{G}'}y$ si et seulement si $yR^{\mathcal{G}'}x$ si et seulement si $x \in y$.

   Il est alors évident que $\mathcal{G}$ est un sous-graphe de $\mathcal{G}'$ qui est bien au plus dénombrable et pour tout S_1, S_2 finis disjoints inclus dans G, le point S_1 de G' n'est relié qu'au points de S_1 et donc, a fortiori, pas à ceux de S_2.

On pose alors $\mathcal{G}_0 = \mathcal{G}$, $\mathcal{G}_{n+1} = \mathcal{G}'_n$ et $\mathcal{H} = \bigcup_n \mathcal{G}_n$. $\mathcal{H}$ est un surgraphe de $\mathcal{G}$ et si S_1 et S_2 sont finis disjoints inclus dans H, il existe n tel qu'ils sont inclus dans G_n et il existe donc $s \in G_{n+1}$ qui soit relié à tous les points de S_1 et à aucun point de S_2 (et tel qu'on ait même $s \notin S_1 \cup S_2$).

On peut d'ailleurs vérifier que $|H| = \aleph_0$ (même si le graphe de départ $\mathcal{G}$ est fini car $G_{n+1} \setminus G_n \neq \emptyset$). Il s'en suit donc bien que T a des modèles dénombrables et qu'elle est donc consistante.

3. Tout d'abord, K est non vide, en effet, comme R est anti-réflexive et qu'il n'y a pas de fonctions dans le langage (et donc que tout sous-ensemble de sommet muni de la structure induite est un sous-graphe), pour tout $g \in G$ et $h \in H$, l'application $g \mapsto h$ est bien un isomorphisme partiel.

   Soit maintenant $f : \mathcal{G} \to \mathcal{H}$ un isomorphisme partiel de domaine fini S et $g \in G$. Si $g \in S$ il n'y a rien à faire. Si $g \notin S$, on note $S_1 = \{s \in S : sRg\}$ et $S_2 = \{s \in S : \neg sRg\} = S \setminus S_1$. Comme ces deux ensembles sont finis et disjoints, c'est aussi le cas de $f(S_1)$ et de $f(S_2)$. Par le caractère aléatoire de $\mathcal{H}$, on trouve alors $h \in H$ qui soit relié à tous les points de $f(S_1)$ et à aucun de $f(S_2)$. Par la version un peu plus forte de l'axiome, on peut d'ailleurs supposer que $h \notin f(S_1) \cup f(S_2) = \mathrm{Im}(f)$. Il est alors facile de montrer que f' définie par :

$$\left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{G} & \to & \mathcal{H} \\ s \in S & \mapsto & f(s) \\ g & \mapsto & h \end{array} \right.$$

   est un isomorphisme partiel.

   La dernière propriété à démontrer se déduit du cas précédent par symmétrie, on veut maintenant agrandir le domaine de f^{-1} isomorphisme partiel de $\mathcal{H}$ dans $\mathcal{G}$.

4. Soit $\mathcal{G}$ et $\mathcal{H}$ deux graphes aléatoire, A un sous-graphe commun et $\varphi[x, \overline{a}]$ une formule où $\overline{a} \in A$. Par un théorème du cours, il suffit de montrer que $\mathcal{G} \models \exists x \varphi[x, \overline{a}]$ implique $\mathcal{H} \models \exists x \varphi[x, \overline{a}]$. Soit alors $g \in G$ tel que $\mathcal{G} \models \varphi[g, \overline{a}]$. L'identité sur A est un isomorphisme partiel de domaine fini de $\mathcal{G}$ and $\mathcal{H}$ et il suit donc de la propriété du va qu'il existe un isomorphisme f' qui étend id_A et dont le domaine contient g. On a alors $\mathcal{H} \models \varphi[f'(g), f'(\overline{a})]$, i.e. $\mathcal{H} \models \varphi[f'(g), \overline{a}]$.

5. Posons $G = \{g_i : i \in \mathbb{N}\}$ et $H = \{h_i : i \in \mathbb{N}\}$ deux énumérations de G et H. On construit alors par récurrence une suite d'isomorphismes partiels f_i de domaine fini tel que le domaine de f_{2i} contient g_i et l'image de f_{2i+1} contient h_i et f_i étend f_j si $i \geqslant j$.

   On pose f_{-1} un isomorphisme partiel de domaine fini quelconque entre $\mathcal{G}$ et $\mathcal{H}$ (qui existe par la question précédente). Si f_{2i-1} est construit, on pose f_{2i} qui l'étend et donc le domaine contient g_i (qui existe par le va) et si f_{2i} est construit, on pose f_{2i+1} qui l'étend et donc l'image contient h_i (qui existe par le vient).

   On pose alors $f = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} f_n$ qui est bien un isomorphisme partiel. Son domaine contient tout G et son image tout H, c'est donc bien un isomorphisme de $\mathcal{G}$ dans $\mathcal{H}$.

6. Il y avait plusieurs façons de résoudre cette question. La première consiste à voir que T n'a que des modèles infinis. En effet si $\mathcal{G} \models T$ est fini, alors, par la deuxième version de l'axiome, il existe un point de G qui n'est pas dans G, ce qui est absurde.

   Par Löwenheim-Skolem descendant si $\mathcal{G}$ et $\mathcal{H} \models T$, il existe $\mathcal{G}_0 \preccurlyeq \mathcal{G}$ et $\mathcal{H}_0 \preccurlyeq \mathcal{H}$ dénombrables. Mais comme T est $\aleph_0$-catégorique, $\mathcal{G}_0$ et $\mathcal{H}_0$ sont isomorphes. Il s'en suit donc que $\mathcal{G} \equiv \mathcal{G}_0 \equiv \mathcal{H}_0 \equiv \mathcal{H}$ et donc que T est complète.

   L'autre méthode consiste à dire que si $\mathcal{G}$ et $\mathcal{H} \models T$, comme on l'a vu $g \mapsto h$ pour $g \in G$ et $h \in H$ quelconques est un isomorphisme partiel. Quitte à identifier ces deux points, on a donc une sous-structure A commune à $\mathcal{G}$ et $\mathcal{H}$. Par élimination des quantificateurs, tout énoncé φ est équivalent à une formule $\psi[a]$ avec $a \in A$ sans quantificateurs qui est vraie dans $\mathcal{G}$ si et seulement si elle est vraie dans A, si et seulement si elle est vraie dans $\mathcal{H}$.

7. Soit $\mathcal{L}'$ le langage $\mathcal{L}_G$ auquel on rajoute une constante h_P par partie de G et T' la théorie $T \cup \{gRh_P : g \in P\} \cup \{\neg gRh_P : g \notin P\}$. Soit $T_0 \subset T$ finie. On a alors $T_0 \subset T \cup \{gRh_{P_i} : g \in S_1^i\} \cup \{\neg gRh_{P_i} : g \in S_2^i\}$ où $S_1^i \subseteq P_i$ est fini, et de même $S_2^i \subseteq P_i^c$ (le complémentaire de P_i) est fini. On a donc bien S_1^i et S_2^i finis disjoints. Il existe donc $g_i \in G$ tel que g_i soit relié aux points de S_1^i et pas à ceux de S_2^i. La structure où h_{P_i} est interprétée par g_i est donc un modèle de T_0. Il s'en suit donc que T est finiment consistante donc consistante. De plus $|\mathcal{L}'| = 2^{|G|}$ et tout modèle de T' est au moins de cardinal $2^{|G|}$ (car les h_P sont forcément distincts). Par Löwenheim-Skolem descendant, il existe donc $\mathcal{H} \models T'$ de cardinal $2^{|G|}$.

Il y a aussi une autre preuve (que je trouve moins bien parce que plus ad-hoc) : construire un graphe $\mathcal{H}_0$ qui contient les nouveaux points h_P tels qu'on les veut, voir que $\mathcal{H}_0$ est alors de cardinal $2^{|G|}$ et ensuite appliquer l'argument de chaîne de la question 1 pour obtenir un sur-graphe $\mathcal{H} \vDash T$ qui est lui aussi de cardinal $2^{|G|}$.

8. On peut remarquer que dans la question 3 lorsqu'on prouve que K est non vide est lorsqu'on prouve le va, on n'utilise pas que $\mathcal{G}$ est aléatoire (juste que c'est un graphe). Il s'en suit donc que l'argument de la question 5 (en enlevant les étapes où on étend l'image) nous montre que tout graphe au plus dénombrable se plonge dans $\mathcal{G}$, en particulier c'est vrai pour les graphes finis.

   On peut aussi remarquer que tout graphe fini $\mathcal{H}$ se plonge dans un graphe aléatoire (dénombrable) $\mathcal{H}_0$ comme montré à la question 1. Par le théorème de Löwenheim-Skolemn descendant il existe $\mathcal{G}_0 \vDash T$ dénombrable qui se plonge dans $\mathcal{G}$. Mais comme $\mathcal{G}_0 \simeq \mathcal{H}_0$, on obtient bien un plongement de $\mathcal{H}$ dans $\mathcal{G}$.

Exercice 4 (Ordres discrets) **:**

1. On a $2\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Z}$ mais pas $2\mathbb{Z} \preccurlyeq \mathbb{Z}$ car $\exists x\, 0 < x < 2$ est vrai dans la première structure mais pas dans la deuxième. De plus $2\mathbb{Z}$ est isomorphe à $\mathbb{Z}$. C'est donc bien modèle de la $\mathcal{L}$-théorie de $\mathbb{Z}$ qui ne peut donc pas éliminer les quantificateurs.

2. La théorie $T^\star$ contient les énoncés suivants :
   - $\forall x \forall y \forall z\, ((x < y \wedge y < z) \to x < z) \wedge \neg x < x \wedge (x < y \vee x = y \vee y < x)$;
   - $\forall x \exists y \exists z\, y < x \wedge x < z \wedge (\forall u\, (u < x \to (u < y \vee u = y)) \wedge (x < u \to (z < u \wedge z = u)))$;
   - $\forall x, x < s(x) \wedge \neg(\exists y\, x < y \wedge y < s(x))$.

3. Soient M et $N \vDash T^\star$, $A \subseteq M$, $B \subseteq M$ et $f : A \to B$ un isomorphisme. Quitte à étendre f à l'ensemble $\{a \in M : \exists n \in \mathbb{N}\, s^n(a) \in A\}$ en posant $f(s^{-n}(a)) = s^{-n}(f(a))$ qui est bien défini car s est injective, on peut supposer que A est aussi clos par l'inverse de s.

   Soit alors $c \in M$. On veut montrer qu'il existe $N^\star$ une extension élémentaire de N, $A' \subseteq M$ tel que $c \in A'$, $B' \subseteq N^\star$ et $g : A' \to B'$ un isomorphisme. On aura alors fini car pour tout $\mathcal{L}$-formule $\varphi(y, \overline{x})$ sans quantificateurs et $\overline{a} \in A$, on a alors $N^\star \vDash \varphi(f(c), f(\overline{a}))$, d'où $N^\star \vDash \exists y\, \varphi(y, f(\overline{a}))$ et donc $N \vDash \exists y\, \varphi(y, f(\overline{a}))$.

   Soit alors $A^- = \{a \in A : a < c\}$ et $A^+ = \{a \in A : c < a\}$. Notons que pour tout $a \in A^-$, on a encore $s(a) \in A^-$ et donc entre tout élément de A^- et tout élément de A^+ il y a au moins un élément dans N. Par compacité il s'en suit que la théorie $\mathcal{D}(N) \cup \{a < c : a \in A^-\} \cup \{c < a : A^+\}$, où c est une nouvelle constante, est consistante. Soit $N^\star$ un modèle de cette théorie, il suffit alors d'étendre f en c par $f(s^n(c)) = s^n(c^{N^\star})$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$.

4. Tout modèle de T contient une copie de $\mathbb{Z}$ et peut donc être enrichi en un modèle de $T \cup \Delta(\mathbb{Z})$ qui est complète car T élimine les quantificateurs. Il s'en suit donc que $T^\star$ est complète. De même, tout ordre total discret sans extrémité peut être enrichi en un modèle de $T^\star$ et donc cette dernière théorie est aussi complète.

Exercice 5 (Théorème d'Ax) **:**

1. Il est évident que T contient ACF car tous les $\overline{\mathbb{F}_p}$ sont des corps algébriquement clos. De plus si on note φ_k la formule $1 + \cdots + 1 \neq 0$ où 1 apparait k fois alors pour tout $p > k \neq 0$, $\overline{\mathbb{F}_p} \vDash \varphi_k$ et donc $T \supseteq \mathrm{ACF}_0 = \mathrm{ACF} \cup \{\varphi_k : k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\}$. Comme ACF_0 est complète et que T est close par déduction, on a bien $T = \{\varphi : \mathrm{ACF}_0 \vDash \varphi\}$.

2. Si $\mathbb{C} \vDash \varphi$ alors comme $\mathbb{C} \vDash \mathrm{ACF}_0$ et ACF_0 est complète, on a $\mathrm{ACF}_0 \vDash \varphi$. Par compacité (et le fait que $\varphi_{!k} \to \bigwedge_{0<i\leqslant k} \varphi_k$), il existe k tel que $\mathrm{ACF} \cup \{\varphi_k\} \vDash \varphi$ et donc pour tout $p > k$, $\overline{\mathbb{F}_p} \vDash \varphi$. Réciproquement s'il existe k tel que pour tout $p > k$, $\overline{\mathbb{F}_p} \vDash \varphi$ alors par définition $\varphi \in T$ et donc par la question précédente $\mathrm{ACF}_0 \vDash \varphi$ ce qui implique que $\mathbb{C} \vDash \varphi$.

3. Comme $\mathbb{F}_{p^k}$ est fini il est évident que toute fonction injective $\mathbb{F}_{p^k}^n \to \mathbb{F}_{p^k}^n$ est surjective. Pour ce qui est de $\overline{\mathbb{F}_p}$, il suffit de savoir que $\overline{\mathbb{F}_p} = \bigcup_k \mathbb{F}_{p^k}$. Soit donc $f : \overline{\mathbb{F}_p}^n \to \overline{\mathbb{F}_p}^n$ polynomiale injective et soit $\overline{a} \in \overline{\mathbb{F}_p}^n$. Soit alors k tel que tous les coefficients des polynômes définissant f et $\overline{a}$ soient dans $\mathbb{F}_{p^k}$. La restriction de f à $\mathbb{F}_{p^k}^n$ est injective donc surjective et donc $\overline{a}$ est dans l'image de f restreint à $\mathbb{F}_{p^k}^n$ et donc a fortiori de f. On a donc bien montré que f est surjective.

4. Tout d'abord posons quelques notations. Soit I un uplet d'entiers et $\overline{x}$ un uplet de variables de même longueur, on note $\overline{x}^I$ le monôme $\prod_i x_i^{I_i}$ et $|I| = \sum_i I_i$. Soient d et n des entiers (non nuls). On pose $\psi_{n,d}$ la formule :

$$\forall\overline{x}[(\forall\overline{u}\overline{v}, \bigwedge_{i<n}(\sum_{|I|\leqslant d} x_{i,I}\overline{u}^I = \sum_{|I|\leqslant d} x_{i,I}\overline{v}^I) \rightarrow \bigwedge_{i<n} u_i = v_i) \rightarrow (\forall\overline{u}\exists\overline{v}\bigwedge_{i<n} u_i = \sum_{|I|\leqslant d} x_{i,I}\overline{u}^I)]$$

qui est vraie dans un corps K si et seulement si toute fonction polynomiale, de degré au plus d, de K^n dans K^n injective est surjective. On a montré dans la question précédente que pour tout n, d et p, $\overline{\mathbb{F}_p} \vDash \psi_{n,d}$ et donc par la question 2, $\mathbb{C} \vDash \psi_{n,d}$.