Silvain Rideau
Bureau T5

silvain.rideau@ens.fr
www.eleves.ens.fr/home/srideau

TD de Logique 8

21 et 24 novembre 2014

Les exercices qui ne sont pas abordés en cours, seront (certainement) corrigés sur ma page personelle (voir ci-dessus).

Exercice 1 (Un peu d'ultraproduits pour commencer) **:**
Soient $\mathcal{L}$ un langage dénombrable, $(M_i)_{i\in\mathbb{N}}$ une famille de $\mathcal{L}$-structures, $\mathfrak{F}$ un ultrafiltre non-principal sur $\mathbb{N}$, $M^\star = \prod_{i\in\mathbb{N}} M_i/\mathfrak{F}$, $A \subseteq M^\star$ dénombrable et $\Sigma(\overline{x})$ un ensemble de $\mathcal{L}(A)$-formules (ayant pour seule variables libres les variables de $\overline{x}$). Pour tout $i \in \mathbb{N}$, et $a \in A$, on choisit $a_i \in M_i$ tel que $(a^i)_{i\in\mathbb{N}}/\mathfrak{F} = a$. On suppose que pour tout $\Sigma_0 \subseteq \Sigma$ fini, il existe $\overline{b} \in M^\star$ tel que $M^\star \vDash \bigwedge_{\varphi\in\Sigma_0} \varphi(\overline{b})$.

1. Montrer que Σ est dénombrable.
2. Soit $\Sigma = \{\varphi_j(\overline{x}, \overline{a}_j) : j \in \mathbb{N}\}$ une énumération de Σ. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit
$$S(n) = \{i \in \mathbb{N} : M_i \vDash \exists \overline{x} \bigwedge_{j=0}^{n} \varphi_j(\overline{x}, \overline{a}_j^i)\}.$$
Montrer que les $S(n)$ forment une chaîne décroissante d'éléments de $\mathfrak{F}$.
3. Soit $(\overline{b}_i)_{i\in\mathbb{N}}$ la suite définie par :
   - Si $i \in S(0)$, soit m maximal tel que $m \leqslant i$ et $i \in S(m)$ et soit $\overline{b}_i \in M_i$ satisfaisant $\bigwedge_{j=0}^{m} \varphi_j(\overline{x}, \overline{a}_j^i)$;
   - Sinon, soit $\overline{b}_i \in M_i$ quelconque.

   Montrer que $(\overline{b}_i)_{i\in\mathbb{N}}/\mathfrak{F} \in M^\star$ satisfait toutes les formules de Σ.
4. Soit $\mathcal{L} = \{+, -, 0, \cdot, 1, <\}$ le langage des anneaux ordonnés et $M_i = \mathbb{Q}$ pour tout i. On rappelle qu'on peut identifier $\mathbb{Q}$ à un sous ensemble de $M^\star$ par un plongement diagonal. On définit $F = \{m \in M^\star : \exists n \in \mathbb{N}, -n < m < n\}$. Montrer que F est un anneau et que $\mathfrak{M} = \{m \in F : \forall n \in \mathbb{N}_{>0}, -n^{-1} < m < n^{-1}\}$ est un idéal maximal.
5. Montrer que $F/\mathfrak{M}$ est un corps ordonné complet et que $\mathbb{Q}$ est dense dans $F/\mathfrak{M}$.

On vient donc de reconstruire $\mathbb{R}$.

Exercice 2 (Fonctions primitives récursives) **:**

1. Montrer que la fonction $pgcd$ est primitive récursive.
2. Montrer que la fonction fib vérifiant les égalités suivantes est primitive récursive :
$$fib(0) = 1\,;\ fib(1) = 1\,;\ fib(n+2) = fib(n+1) + fib(n)$$
3. Soit $f \in \mathcal{F}_p$. Montrer que f est primitive récursive si et seulement si le graphe de f est un sous-ensemble primitif récursif de $\mathbb{N}^{p+1}$ et f est majorée par une fonction primitive récursive $g \in \mathcal{F}_p$.

Exercice 3 (Schémas de récurrence) **:**

1. Soient f et $g \in \mathcal{F}_{p+1}$ définis par récurrence mutuelle :
$$\begin{aligned} f(\overline{x}, 0) &= h(\overline{x}) \\ g(\overline{x}, 0) &= i(\overline{x}) \\ f(\overline{x}, y+1) &= j(\overline{x}, y, f(\overline{x}, y), g(\overline{x}, y)) \\ g(\overline{x}, y+1) &= k(\overline{x}, y, f(\overline{x}, y), g(\overline{x}, y)) \end{aligned}$$
Supposons que h, i, j et k soient primitives récursives, montrer que f et g le sont.

2. Soit $f \in \mathcal{F}_{p+1}$ définie par la récurence suivante :

$$\begin{array}{rcl} f(\overline{x},0) & = & g(\overline{x}) \\ f(\overline{x},y) & = & h(\overline{x},y,f(\overline{x},i(\overline{x},y))) \end{array}$$

où g, h et i sont primitives récursives et $i(\overline{x},y) < y$ pour tout $y > 0$. Montrer que f est primitive récursive.

Exercice 4 (Fonctions élémentaires de Kalmar) **:**
L'ensemble des *fonctions élémentaires* est le plus petit ensemble de fonctions entières (c'est-à-dire de $\mathbb{N}^p$ dans $\mathbb{N}$ pour un certain $p \geqslant 1$) vérifiant les propriétés suivantes :

- les projections P_i^p de $\mathbb{N}^p$ dans $\mathbb{N}$ sont élémentaires
- l'addition, la multiplication et la fonction caractéristique de l'égalité de $\mathbb{N}^2$ dans $\mathbb{N}$ sont élémentaires
- si g de $\mathbb{N}^k$ dans $\mathbb{N}$ et f_1, ..., f_k de $\mathbb{N}^p$ dans $\mathbb{N}$ sont élémentaires alors $g \circ (f_1, \ldots, f_k)$ aussi
- si f de $\mathbb{N}^{p+1}$ dans $\mathbb{N}$ est élémentaire alors la somme bornée et le produit borné :

$$(x_1,\ldots,x_p,x) \mapsto \sum_{i=0}^{x} f(x_1,\ldots,x_p,i) \qquad\qquad (x_1,\ldots,x_p,x) \mapsto \prod_{i=0}^{x} f(x_1,\ldots,x_p,i)$$

de $\mathbb{N}^{p+1}$ dans $\mathbb{N}$ sont élémentaires.

1. Montrer que, pour tout k, la fonction constante égale à k de $\mathbb{N}^p$ dans $\mathbb{N}$ est élémentaire.
2. Montrer que la fonction exponentielle exp de $\mathbb{N}^2$ dans $\mathbb{N}$ définie par $\mathsf{exp}(m,n) = m^n$ est élémentaire.
3. On définit la fonction T de $\mathbb{N}^2$ dans $\mathbb{N}$ par $\mathsf{T}(m,0) = m$ et $\mathsf{T}(m,n+1) = \mathsf{exp}(2,\mathsf{T}(m,n))$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note T_n la fonction $m \mapsto \mathsf{T}(m,n)$ de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$.
   a) Montrer que T est primitive récursive.
   b) Montrer que $(m,n) \mapsto \mathsf{T}(m,n)$ est strictement croissante en n à m fixé et strictement croissante en m à n fixé.
   c) On dit qu'une fonction f de $\mathbb{N}^p$ dans $\mathbb{N}$ est *dominée* par la fonction φ de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ si, pour tout uple $(n_1,\ldots,n_p) \in \mathbb{N}^p$, $f(n_1,\ldots,n_p) \leqslant \varphi(\max(n_1,\ldots,n_p))$.
   Montrer que, pour toute fonction élémentaire f, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que f est dominée par T_n.
   d) Montrer que T n'est pas élémentaire.

Exercice 5 (Fonction d'Ackermann) **:**
On rappelle que la fonction d'Ackermann ξ est définie par $\xi(0,x) = 2^x$, $\xi(y,0) = 1$ et $\xi(y+1,x+1) = \xi(y,\xi(y+1,x))$. On pose $h(y,t) = \mu x < t\, \xi(y,x) = t$.

1. Montrer que $h(y,t) = x$ si et seulement si $\xi(y,x) = t$ ou t n'est pas dans l'image de la fonction $z \mapsto \xi(y,z)$ et $x = 0$.
2. On pose $g(y,t) = \mu x < t\, \exists u < t\, h(y,t) = u \wedge h(y+1,u) = x$. Montrer que $h(y+1,t) = 1 + g(y,t)$ si $g(y,t) > 0$, $h(y+1,t) = 1$ si $g(y,t) = 0$ et $t = 2$ et sinon $h(y+1,t) = 0$.
3. En déduire que h est primitive récursive.
4. En déduire que le graphe de ξ est primitif récursif et que ξ est récursive.
5. On note $s(t) = \mu x < t h(x,t) = x$ et on définit la fonction r par $r(t) = 2s(t) + 1$ si $t \in \mathrm{Im}(\lambda x\, \xi(x,x))$ et $r(t) = 2\sum_{k=2}^{t} \mathbb{1}_{s(k)=0}$ sinon. Montrer que r est primitive récursive, que c'est une bijection et que son inverse n'est pas primitive récursive.
6. Montrer que, par contre, la réciproque d'une bijection récursive est récursive.