Silvain Rideau
Bureau T5

silvain.rideau@ens.fr
www.eleves.ens.fr/home/srideau

# Corrigé du TD de Logique 8 (Fonctions primitives récursives)

21 et 24 novembre 2014

**Exercice 1** (Un peu d'ultraproduits pour commencer) **:**

4. Il suffit de vérifier que si $x$ et $y \in F$ alors $x+y$ et $xy \in F$. Mais il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $-n < x < n$ et $-n < y < n$. on a donc $-2n < x+y < 2n$ et $-n^2 < xy < n^2$.

   Soit maintenant $x$ et $y \in \mathfrak{M}$, pour tout $n \in \mathbb{N}_{>0}$, $-(2n)^{-1} < x < (2n)^{-1}$ et $-(2n)^{-1} < y < (2n)^{-1}$. On a donc $-n^{-1} < x+y < n^{-1}$. De plus si $x \in F$ et $y \in \mathfrak{M}$ alors il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $-n < x < n$. Pour tout $m \in \mathbb{N}_{>0}$, $-(mn)^{-1} < y < (mn)^{-1}$ et donc $-m^{-1} < xy < m^{-1}$. Donc $\mathfrak{M}$ est un idéal. De plus si $x \in F \setminus \mathfrak{M}$, il existe $n \in \mathbb{N}_0$ tel que $x < -n^{-1}$ ou $n^{-1} < x$ dans les deux cas on a alors $-n < x^{-1} < n$. Il s'en suit que tout idéal de $F$ qui contient strictement $\mathfrak{M}$ contient un élément inversible et donc est égal à $F$.

5. Comme $\mathfrak{M}$ est convexe, c'est à dire, pour tout $x$ et $y \in \mathfrak{M}$ et $z \in F$ tel que $x < y < z$, on a $z \in \mathfrak{M}$, le quotient $F/\mathfrak{M}$ peut être muni d'un ordre définit par $x_1 \leqslant x_2$ s'il existe $y_i \in F$ tel que $\pi(y_i) = x_i$ et $y_1 < y_2$, où $\pi : F \to F/\mathfrak{M}$ est la projection canonique. On peut alors vérifier que $F/\mathfrak{M}$ est un corps ordonné pour cet ordre.

   De plus soient $x$ et $y \in F$ tels que $x - y \notin \mathfrak{M}_{>0}$. Il existe donc $n \in \mathbb{N}_{>0}$ tel que $x - y > n^{-1}$. Comme $x$ et $y \in F$, il existe aussi $m \in \mathbb{N}$ tel que $x < m$. On peut alors partitionner $[0, m]$ en $mn$ intervalles de longueur $n^{-1}$ dont les bornes sont rationnelles. Comme $x - y > n^{-1}$, $x$ et $y$ ne peuvent pas être dans le même intervalle et donc il existe $q \in \mathbb{Q}$ tel que $x < q < y$. Par passage au quotient on obtient que $\mathbb{Q}$ est dense dans $F/\mathfrak{M}$.

   Il faut encore montrer que ce corps est complet. Soit $G, D$ un coupure telle que $G$ et $D$ sont not vides. On note $G_{\mathbb{Q}} = G \cap \mathbb{Q}$ et $D_{\mathbb{Q}} = D \cap \mathbb{Q}$. Par la question 3., il existe $b \in M^\star$ tel que pour tout $q \in G_{\mathbb{Q}}$, il existe $q < b$ et pour tout $q \in D_{\mathbb{Q}}$, $b < q$. On a alors que $b \in F$. Si $\pi(b) \in G$, on a alors, par densité de $\mathbb{Q}$ que $\pi(b) = \max G$ et si $\pi(b) \in D$, $\pi(b) = \min D$. Dans tous les cas on a démontré que toutes les coupures de $F/\mathfrak{M}$ qui ne sont pas aux deux extrémités sont de la forme $(-\infty, a), [a, +\infty)$ ou $(-\infty, a], (a, +\infty)$. On a donc bien montré que $F/\mathfrak{M}$ est complet.

**Exercice 3** (Schémas de récurrence) **:**

1. Soit $\alpha : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ une fonction de codage des paires, et $\beta_1$, $\beta_2$ les projections associées. On définit $f^\star(\overline{x}, y) = \alpha(f(\overline{x}, y), g(\overline{x}, y))$. On a alors :

$$\begin{array}{rcl} f^\star(\overline{x}, 0) & = & \alpha(h(\overline{x}), i(\overline{x})) \\ f^\star(\overline{x}, y+1) & = & \alpha(j(\overline{x}, y, \beta_1(f^\star(\overline{x}, y)), \beta_2(f^\star(\overline{x}, y))), h(\overline{x}, y, \beta_1(f^\star(\overline{x}, y)), \beta_2(f^\star(\overline{x}, y)))) \end{array}$$

   qui est bien une fonction primitive récursive. De plus $f(\overline{x}, y) = \beta_1(f^\star(\overline{x}, y))$ et $g(\overline{x}, y) = \beta_2(f^\star(\overline{x}, y))$.

2. On fixe un codage des suites finies. En particulier, on deux fonctions primitives récursives $t : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ et $n : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ telles que $t(x, s)$ est le code de la suite ou l'on rajoute $x$ comme dernier élément de la suite codée par $s$ et $n(i, s)$ est le $i$ème élément de $s$ s'il existe et $0$ sinon.

   Soit alors $f^\star(\overline{x}, y) = \langle (f(\overline{x}, 0), \ldots, f(\overline{x}, y)) \rangle$ où $\langle \cdot \rangle$ dénote le code. On a alors :

$$\begin{array}{rcl} f^\star(\overline{x}, 0) & = & \langle g(\overline{x}) \rangle \\ f^\star(\overline{x}, y+1) & = & t(h(\overline{x}, y, n(i(\overline{x}, y), f^\star(\overline{x}, y))), f^\star(\overline{x}, y)) \end{array}$$

   Il s'en suit que $f^\star$ est primitive récursive. De plus $f(\overline{x}, y) = n(y, f^\star(\overline{x}, y))$.

**Exercice 5** (Fonction d'Ackermann) **:**

1. Si $t \in \mathrm{Im}(z \mapsto \xi(y, z))$, alors $t = \xi(n, x_0) > x_0$, et le schéma $\mu$ borné rend donc bien ce $x_0$, i.e. $h(y, t) = x_0$. Sinon il n'existe pas de $x_0$ tel que $t = \xi(n, x_0)$ (encore moins de $x_0 < t$) et donc le schéma $\mu$ borné rend $0$, i.e. $h(y, t) = 0$.

2. Si $g(y,t) > 0$, il existe $x = g(y,t) > 0$ et $u$ tels que que $h(y,t) = u$ et $h(y+1,u) = x$, i.e. $\xi(y+1,x) = u > x > 0$ et donc $t = \xi(y,u) = \xi(y,\xi(y+1,x)) = \xi(y+1,x+1)$ et donc $h(y+1,t) = 1+x = 1+g(y,t)$.

   Si $g(y,t) = 0$, soit $t \in \mathrm{Im}(z \mapsto \xi(y+1,z))$. Alots soit $t = \xi(y+1,0)$ et donc $h(y+1,t) = 0$, soit $t = \xi(y,\xi(y+1,x))$ pour un certain $x$ et donc le schéma $\mu$ est réalisé par un point nécessairement plus petit que $t$ et doit donc être réalisé pour $0$ (sinon $g(y,t) > 0$), i.e. $t = \xi(y+1,1) = \xi(y,\xi(y+1,0)) = \xi(y,1) = \xi(0,1) = 2$.

   Enfin, si $t \notin \mathrm{Im}(z \mapsto \xi(y+1,z))$, on a bien $h(y+1,t) = 0$.

3. Commençons par voir que $h(0,t)$, qui est égale à $x$ si $t = 2^x$ et à $0$ sinon, est bien primitive récursive et que $h(1,t)$, qui est égale à $x$ si $t$ est une tour de puissances de $2$ de hauteur $x$ et $0$ sinon, est aussi primitive récursive.

   Posons maintenant $h'(y,t) = \langle \alpha_2(h(y,0),h(y+1,0)),\dots,\alpha_2(h(y,t),h(y+1,t))\rangle$. On a alors $h'(0,t) = \langle \alpha_2(h(0,0),h(y+1,0))\dots,\alpha_2(h(0,t),h(1,t))\rangle$, qui est bien primitive récursive (il faut faire une récurence primitive sur $t$ pour définir cette fonction). De même, en utilisant la relation de récurence sur $h$ donnée à la question précédente (et en faisant une autre récurence primitive sur $t$), on montre que $h'(y+1,t)$ est une fonction récursive primitive des $h(y+1,u)$ et des $h(y,u)$ pour $u \leqslant t$ (ainsi bien sur que de $t$ et $y$) et donc de $h'(y,t)$.

4. On a $(y,x,t)$ dans le graphe de $\xi$ si et seulement si $x = h(t,y)$ et si $x = 0$ alors $t = 1$. Comme on vient de montrer que $h$ est primitive récursive on a le résultat voulu. Maintenant comme $\xi(y,x) = \mathbb{1}_{x=0} + \mathbb{1}_{x\neq 0}\mu t[h(y,t) = x]$, elle est bien récursive.

5. Comme $h$ est primitive récursive, $s$ l'est aussi et donc $r$ l'est aussi (elle est définie à partir du graphe de $\xi$ et de $s$ avec une disjonction de cas et une somme bornée). De plus elle est injective, en effet si $r(t_1) = r(t_2)$ est impaire alors on doit avoir $s(t_1) = s(t_2)$ et donc si $s(t_1) = s(t_2) > 0$, $t_i = \xi(s(t_i), s(t_1))$. Si $s(t_1) = s(t_2) = 0$ mais $t_1$ est dans l'image de $x \mapsto \xi(x,x)$ alors $t_1 = t_2 = 1$. Si $r(t_1) = r(t_2)$ est pair alors $\sum_{k=2}^{t_1} \mathbb{1}_{s(k)=0} = \sum_{k=2}^{t_2} \mathbb{1}_{s(k)=0}$ et comme $s(t_i) = 0$ (sinon on serait dans le cas précédent) si $t_1 > t_2$ alors $\sum_{k=2}^{t_1} \mathbb{1}_{s(k)=0} > \sum_{k=2}^{t_2} \mathbb{1}_{s(k)=0}$.

   Pour ce qui est de la surjectivité, sur les impairs c'est du au fait que $\xi(x,x)$ est une fonction totale et sur les pairs c'est du au fait qu'on compte les point qui n'étaient pas dans l'image sauf $0$ qui sont plus petits que $t$.

   Si l'inverse de $r$ était primitive récursive, comme $r^{-1}(2x+1) = s^{-1}(x) = \xi(x,x)$, cette dernière fonction serait primitive récursive, c'est absurde.

6. Soit $f$ bijective récursive. La réciproque de $f$ est donnée par $f^{-1}(y) = \mu x[f(x) = y]$.