Silvain Rideau
Bureau T5

silvain.rideau@ens.fr
www.eleves.ens.fr/home/srideau

Corrigé du TD de Logique 10

5 et 8 décembre 2014

Exercice 2 (Séparabilité) **:**

1. Supposons qu'il existe $D \subseteq \mathbb{N}$ récursif tel que $A \subseteq D$ et $B \cap D = \varnothing$. Soit i_0 tel que φ_{i_0} soit la fonction caractéristique de D. Si $i_0 \in D$, $\varphi_{i_0}(i_0) = 1$ et donc $i_0 \in B$ ce qui contredit le fait que $D \cap B = \varnothing$. Si $i_0 \notin D$, $\varphi_{i_0}(i_0) = 0$ d'où $i_0 \in A \subset D$, ce qui est absurde.

   Un tel D ne peut donc pas exister.

2. Soient A et $B \subset \mathbb{N}$ disjoints de complémentaire récursivement énumérable. Soit $f_A \in \mathcal{F}^1$ récursive de domaine A^c et $f_B \in \mathcal{F}^1$ récursive de domaine B^c. Comme $A \cap B = \varnothing$, $A^c \cup B^c = \mathbb{N}$ et donc en tout point, une de ces deux fonctions est définie. Soient i_A et i_B des codes de f_A et f_B respectivement. On pose $t(x) = \mu y\,[B^1(i_A, x, y) \wedge B^1(i_B, x, y)]$ et $\mathbb{1}_D(x) = B^1(i_B, x, t(x))$ qui sont récursives totales. Montrons que D sépare A et B. Soit $x \in A$, on a alors $t(x) = T(i_B, x)$ car f_A n'est pas définie en x et donc $\mathbb{1}_D(x) = 1$, i.e. $x \in D$. D'autre part, si $x \in B$, on a $t(x) = T(i_A, x)$ et donc $\mathbb{1}_D(x) = 0$, i.e. $x \notin D$.

Exercice 3 :

1. On pose $g(0) = f(0)$ et $g(x+1) = f(\mu t\, f(t) \notin \{g(i) : i \leqslant x\})$. Comme l'image de f est infinie cette fonction est totale et elle est bien évidemment injective. Si $y \in \mathrm{Im}(f)$, $f^{-1}(y)$ a un plus petit élément x_y et on aura $g(n) = y$ où $n = |\{x_{y'} < x_y : y' \in \mathrm{Im}(f)\}|$. Enfin g est récursive car elle est définie par récurence (généralisée).

2. Soit A récursivement énumérable non récursif. Il existe f récursive tel que $A = \mathrm{Im}(f)$ et par la question précédente il existe g récursive injective telle que $A = \mathrm{Im}(g)$.

3. Soit $g(x) = \mu y\,[y > x \wedge f(y) < x]$ qui est récursive. On a $\mathrm{dom}(g) = B$ et donc B est récursivement énumérable. Si le complémentaire de B est fini, il a en particulier un plus grand élément y_0 tel que pour tout $x > y_0$, $x \in B$. On pose alors $x_0 = y_0 + 1$ et $x_{n+1} > x_n$ tel que $f(x_{n+1}) < f(x_n)$. La suite des $f(x_n)$ est alors une suite infinie strictment décroissante, ce qui est absurde. Le complémentaire de B est donc infini.

4. Soit g récursive totale telle que $\mathrm{Im}(g) = C$. Posons $h(x) = g(\mu t\, f(g(t)) > x)$. Comme C est infini et f injective, g est récursive totale. On a alors $h(x) \in C \subseteq B^c$ et donc pour tout $y > h(x)$, $f(y) \geqslant f(h(x)) > x$. On a alors $\mathbb{1}_A = \exists t \leqslant h(x)\; f(t) = x$, qui est donc bien récursive.

5. Si A est récursivement énumérable non récursif, on sait que c'est l'image d'une fonction récursive qu'on peut supposer injective. Soit B tel que dans les question précédentes, alors B est récursivement énumérable de complémentaire infini et si C est récursivement énumérable infini, on ne peut pas avoir $B \cap C = \varnothing$ car par la question précédente cela contredirait le fait que A n'est pas récursif.

Exercice 4 (Fonction récursives partielles et extension) **:**

1. Soit h une fonction récursive qui étend T_i. On a alors $\mathbb{1}_A(x) = \mathcal{A}(i, x, h(x))$. où $\mathcal{A}(i, x, t)$ est le prédicat (primitif récursif) qui est vrai quand la machine i termine sur l'entrée x en moins de t étapes. En effet, si $x \in A$ alors $h(x) = T_i(x)$ et on a bien $\mathcal{A}(i, x, t)$. Sinon la machine i ne termine pas sur l'entrée x, en particulier elle ne termine pas en moins de $h(x)$ étapes et donc $\mathcal{A}(i, x, h(x))$ est faux.

2. Cela suit immédiatement de la question précédente et de l'existence d'un ensemble récursivement énumérable non récursif.

Exercice 5 (Modèles de l'arithmétique faible) **:**

5. On considère $Nn \sqcup \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ et on le munit de la $\mathcal{L}_{\mathrm{ar}}$-structure suivante :

- dans $\mathbb{N}$ l'interprétation des symboles est ususelle,
- si $a = (x, i)$, $S(a) = (x, i + 1)$,
- si $a = (x, i)$ et $n \in \mathbb{N}$, $a + n = n + a = (x, i + n)$,
- si $a = (x, i)$ et $b = (y, j)$, $a + b = (2y, i + j)$,
- si $a = (x, i)$ et $n \in \mathbb{N}^\star$, $a \times n = n \times a = (x, i \times n)$,
- si $a = (x, i)$, $a \times 0 = 0 \times a = (x, 0)$,
- si $a = (x, i)$ et $b = (y, j)$, $a \times b = (2x, i \times j)$.

Montrons que c'est un modèle de $\mathcal{P}_0$.

(A1) $Sn = n + 1 \neq 0$ et $S(x, i) = (x, i + 1) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ ne peut être égal à 0 non plus.

(A2) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, si $n \neq 0$ alors $n = S(n - 1)$. De plus $(x, i) = S(x, i - 1)$.

(A3) On a $S(\mathbb{N}) \subseteq \mathbb{N}$ (et le successeur est bien injectif sur $\mathbb{N}$) et $S(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}) = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. Il suffit de de vérifier que si $S(x, i) = (x, i + 1) = S(y, j) = (y, j + 1)$ implique $x = y$ et $i = j$, mais c'est évident.

(A4) On a $n + 0 = n$ et $(x, i) + 0 = (x, i + 0) = (x, i)$.

(A5) On a $n_0 + S(n_1) = S(n_0 + n_1)$, $(x, i) + S(n) = (x, i + n + 1) = S(x, i + n) = S((x, i) + n)$, $n + S(x, i) = (x, i + 1 + n) = S(n + (x, i))$ et enfin $(x, i) + S(y, j) = (2y, i + j + 1) = S((x, i) + (y, j))$.

(A6) Cet axiome est vérifié par défintion de la structure.

(A7) On a $n_0 \times S(n_1) = (n_0 \times n_1) + n_0$, $(x, i) \times S(n) = (x, in + i) = ((x, i) \times n) + (x, i)$, $n \times S(x, i) = (x, ni + n) = (n \times (x, i)) + n$, et enfin $(x, i) \times S(y, j) = (x, i) \times (y, j + 1) = (2x, i(j + 1))$. Mais on a aussi $((x, i) \times (y, j)) + (x, i) = (2x, ij) + (x, i) = (2x, ij + i)$.

C'est donc bien un modéle de $\mathcal{P}_0$. De plus l'addition et la multiplication ne sont ni associatives ni commutatives.

Exercice 6 (Théorème de Tennenbaum) **:**

1. Comme $A \subset \mathbb{N}$ est récursivement énumérable, il existe $A_0 \subseteq \mathbb{N}^2$ récursif tel que $A = \pi_1(A_0)$ où π_1 est la première projection. Par le théorème de représentabilité, il existe une formule $\psi[x, y]$ Σ_1 qui représente A_0. L'ensemble A est alors défini dans $\mathbb{N}$ par $\exists y \psi[x, y]$ qui est aussi Σ_1. Soit donc $\varphi[x, \overline{y}]$ une formule Δ_0 telle que $\exists \overline{y} \varphi_A[x, \overline{y}]$ définisse A dans $\mathbb{N}$. De même on trouve φ_B telle que $\exists \overline{y} \varphi_B[x, \overline{y}]$ définisse B dans $\mathbb{N}$.

   Posons $\theta[t] = \forall x, \overline{y}, \overline{z} \leqslant t\, \neg(\varphi_A[x, \overline{y}] \wedge \varphi_B[x, \overline{z}])$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\mathcal{N} \vDash \theta[\underline{n}]$. Par le lemme d'overspill, il existe $c \in M$ non standard tel que $\mathcal{M} \vDash \theta[c]$. On pose alors $\widetilde{A}[x] = \exists \overline{y} \leqslant c\, \varphi_A[x, \overline{y}]$.

   Soit $n \in A$, il existe donc $\overline{m} \in \mathbb{N}$ tel que $\mathcal{N} \vDash \varphi_A[\underline{n}, \underline{\overline{m}}]$. Par Σ_1-complétude de $\mathcal{P}$, on a donc $\mathcal{M} \vDash \varphi_A[\underline{n}, \underline{\overline{m}}]$, et comme $\underline{\overline{m}} \leqslant c$, on a $\underline{n} \in A^\star$. De même, si $\underline{n} \in A^\star \cap i(B)$, il existe $\overline{a} \in M$ et $\overline{m} \in \mathbb{N}$ tels que $\overline{a} \leqslant c$, $\mathcal{M} \vDash \varphi_A[\underline{n}, \overline{a}]$ et $\mathcal{M} \vDash \varphi_B[\underline{n}, \underline{\overline{m}}]$, ce qui contredit le choix de c.

2. Soit $\varphi[x, \overline{y}]$ une $\mathcal{L}_{\text{ar}}$-formule, on peut montrer par récurence que pour tout $\overline{a}$, $\mathcal{M} \vDash \forall b \exists c \forall x \leqslant b\, \varphi[x, \overline{a}] \iff p_n | c \wedge \forall x\, x | c \Rightarrow c \leqslant b$. La récurence est immédiate. Si on a trouvé un c qui marche pour b, alors, si $\mathcal{M} \vDash \varphi[b + 1, \overline{a}]$, $c \times p_{b+1}$ convient pour $b + 1$, sinon c convient. En appliquant ce résultat à un b non standard, on obtient le c voulu.

3. L'algorithme suivant calcule la fonction caractériste de $A^\star$: soit $n \in \mathbb{N}$, on calcule $p_{\underline{n}}$ (dans $\mathcal{M}$), on calcule le reste de la division euclidienne de c par $p_{\underline{n}}$ (i.e. on trouve q et $r \in M$ tels que $qp_{\underline{n}} + r = c$), si c'est 0 on rend 1 sinon on rend 0. Ceci contredit le fait que A et B ne sont pas récursivement séparable et donc un tel modèle $\mathcal{M}$ ne peut pas exister.

4. La formule «x est le $\underline{n}$ième nombre premier» est Σ_1 (elle est même Δ_0 à vrai dire), par Σ_1-complétude de $\mathcal{P}$, on a le résultat voulu.

5. Si on suppose seulement que $\oplus$ est récursif, on a plus le droit de faire de multiplications dans $\mathcal{M}$. Mais comme $p_{\underline{n}}$ dans $\mathcal{M}$ est bien $i(p_n)$, l'algorithme de la question 3 n'utilise pas vraiment la multiplication mais simplement $\sum_{j=1}^{p_n} x$.