Silvain Rideau
Bureau T5

silvain.rideau@ens.fr
www.eleves.ens.fr/home/srideau

Corrigé du TD de Logique 12

20 décembre 2013 et 6 janvier 2014

Exercice 3 (Ensembles héréditairement transitifs) **:**

1. Soit α un ordinal, $\alpha \cup \{\alpha\} = \alpha + 1$ est aussi un ordinal dont tout élément est un ordinal et donc est transitif.

2. Soit x héridiitairement transitif et $y \in x$. Comme x est transitif, $y \subseteq x$. Par héréditaire transitivité de x, comme $y \cup \{y\} \subseteq x$, y et tous ses points sont transitifs.

3. Soit x héréditairement transitif. Comme x est transitif, on a $\mathrm{ct}(x) = x$. Par axiome de fondation (et l'exercice précédent) $(x, \in)$ est bien fondé. Prouvons par induction sur $\beta \in x$ que β est un ordinal. Comme x est héréditairement transitif, β est transitif, de plus, par induction, tout élément de β est un ordinal, donc β est un ordinal.

   Le même raisonnement s'applique à x lui même.

Exercice 4 (Relations bien fondées) **:**

1. La définition de H est bien donnée par $H(\alpha) = G(\alpha, \upharpoonright H\alpha$ où G est une classe fonctionnelle. Par la propriété de définition par récurrence transfinie, la classe fonctionnelle H existe.

2. Tout d'abord, par induction sur α, on peut montrer que $x \in H(\alpha)$ si et seulement s'il existe $\beta < \alpha$ tel que $E[x] \subseteq H(\beta)$. En effet, le cas nul et le cas limite sont évidents, et le cas successeur suit de la définition.

   On peut maintenant montrer la proposition voulue par induction sur β. Suppons que la propriété est vérifiée pour β et soit $\alpha \geqslant \beta$ (le cas $\alpha = \beta + 1$ ne présente que peu de difficulté). On a $x \in H(\alpha)$ implique $E[x] \subseteq H(\gamma)$ pour un certain $\gamma < \alpha \geqslant \beta$ et donc $E[x] \subseteq H(\gamma) \subseteq H(\beta)$, i.e. $x \in H(\beta + 1)$.

3. Supposons que pour tout α, $H(\alpha) \neq H(\alpha + 1)$, la classe fonctionnelle qui a $y \in x$ associe le plus petit α tel que $x \in H(\alpha + 1)$ est alors surjective sur la classe des ordinaux. Par remplacement, il s'en suit que la classe des ordinaux est un ensemble, ce qui est absurde. Il existe donc α tel que $H(\alpha + 1) = H(\alpha)$.

   On montre alors par récurrence sur β que $H(\alpha + \beta) = H(\alpha)$. Si β est nul ou limite c'est évident. Sinon $x \in H(\alpha + \beta + 1)$ si et seulement si $E[x] \subseteq H(\alpha + \beta) = H(\alpha)$ et donc $x \in H(\alpha + 1) = H(\alpha)$. Comme on sait déjà que $H(\alpha) \subseteq H(\alpha + \beta)$, on a le résultat voulu.

4. Soit $\alpha = \mathrm{Rg}(x)$, par définition du rang $x \in H(\alpha + 1)$ et donc $E[x] \subseteq H(\alpha)$. On a donc $y \in H(\alpha)$ et $\mathrm{Rg}(y) < \alpha$.

5. On vient de montrer que pour tout $y \in E[x]$, on a $\mathrm{Rg}(y) + 1 \leqslant \mathrm{Rg}(x)$ et donc, en posant $\alpha = \sup\{\mathrm{Rg}(y) + 1 : y \in E[x]\}$, on a $\mathrm{Rg}(x) \geqslant \alpha$. Il suffit alors de montrer que $x \in H(\alpha + 1)$, i.e. $E[x] \subseteq H(\alpha)$. Mais comme, pour tout $y \in E[x]$, $\mathrm{Rg}(y) + 1 \leqslant \alpha$, on a bien $y \in H(\mathrm{Rg}(y) + 1) \subseteq H(\alpha)$.

6. Supposons que $X \neq Y$. Soit $Z = X \setminus Y$. Alors Z est non-vide. Montrons que Z n'admet pas d'élément minimal. En effet, supposons que $z_0 \in Z$ soit un élément minimal. Alors pour tout $x \in E[z_0]$, on a $x \in Y$, donc $\mathrm{Rg}(x)$ est un ordinal. Soit $\alpha = \sup\{\mathrm{Rg}(x) : x \in E[z_0]\}$. Alors $E[z_0] \subseteq H(\alpha + 1)$, donc par définition $z_0 \in H(\alpha + 2) \subseteq Y$, ce qui est absurde.

   Réciproquement, supposons que $X = Y$ et soit $Z \subseteq X$ un sous-ensemble quelconque. Soit $z_0 \in Z$ de rang minimal dans Z, alors z_0 est minimal dans Z par la question 4. Donc (X, E) est bien fondée.

Exercice 5 (Modèles internes) **:**

1. On construit une fonction f par récurrence sur $H(\alpha)$. Pour $\alpha = 0$, ou α limite, il n'y a rien à faire. Soit $\alpha = \beta+1$ et supposons f définie sur $H(\beta)$. Pour $x \in H(\alpha)$, on pose $f(x) = \{f(y) : y \in E[x]\}$.

   Soit $\widetilde{X}$ l'image de f. C'est un ensemble par l'axiome de remplacement. Montrons que $\widetilde{X}$ est transitif. Soient $x \in \widetilde{X}$ et $y \in x$. Soit $x_0 \in X$ tel que $x = f(x_0)$. Alors par définition de f, il existe $y_0 \in E[x_0]$ tel que $f(y_0) = y$. Donc $y \in \widetilde{X}$.

   Montrons ensuite que f est injective. Par l'absurde, supposons qu'il existe $x, x' \in X$ distincts tels que $f(x) = f(x')$. Supposons de plus qu'on a choisi la paire (x, x') de telle sorte que $\mathrm{Rg}(x) \leqslant \mathrm{Rg}(x')$ et $\mathrm{Rg}(x)$ soit minimal. Alors pour tous $y \in E[x]$ et $y' \in X$, on a $f(y') = f(y) \Rightarrow y = y'$. On a $f(x) = f(x')$, donc $\{f(y) : y \in E[x]\} = \{f(y) : y \in E[x']\}$ et par ce qui précède, $\{y \in E[x]\} = \{y \in E[x']\}$. Par extensionnalité de (X, E), on a $y = y'$.

   Enfin, l'injectivité de f étant établie, il est clair par construction que $(x, y) \in E$ si et seulement si $f(x) \in f(y)$. Donc f est un isomorphisme entre (X, E) et $(\tilde{X}, \in)$.

2. C'est clair par la question précédente puisque toute structure (M, E) avec E bien fondée est isomorphe à un $(N, \in)$ avec N ensemble transitif.

3. (Idée) Si $\mathcal{M} = (M, E)$ est un modèle de ZFC $+ \neg\, \mathrm{Coh}(\mathrm{ZFC})$, alors ZFC est consistante. De plus, du point de vue du modèle $\mathcal{M}$, ZFC n'est pas consistante.

   Comme ZFC est une théorie récursive, on a vu dans la preuve du 1er théorème d'incomplétude qu'il existait une formule (Σ_1) $\varphi(x)$ de l'arithmétique qui est vraie dans $\mathbb{N}$ si et seulement si x est le code d'une preuve de « $0 \neq 0$ » dans ZFC. On voit donc que dans l'univers $\mathcal{M}$, il existe un entier n tel que, du point du vue de $\mathcal{M}$, l'énoncé $\varphi(n)$ soit vrai dans $\mathbb{N}$ (où tout est considéré au sens de l'univers $\mathcal{M}$). Comme $\varphi(x)$ est Σ_1 et que $\varphi(k)$ est faux pour tout entier standard k, on en déduit que n est non-standard. On a donc montré qu'il existait des entiers non-standards dans $\mathcal{M}$. En d'autres termes, il existe des éléments de $\omega_{\mathcal{M}}$ (ω au sens de $\mathcal{M}$) qui ne s'écrivent pas comme $1 + 1 + \cdots + 1$ un nombre entier (standard) de fois. Soit A le sous-ensemble de M consistant de ces éléments. Alors $(A, \in)$ n'a pas d'élément minimal.

4. Remarquer que la théorie $T = \mathrm{ZFC} + \mathrm{Coh}(\mathrm{ZFC})$ est récursive. Par le théorème d'incomplétude, si elle est consistante, elle ne peut démontrer sa propre consistance. Donc $\mathrm{Coh}(\mathrm{ZFC} + \mathrm{Coh}(ZFC))$ n'est pas conséquence de T. En d'autres termes, $T \cup \{\neg\, \mathrm{Coh}(T)\}$ est consistante.

   Soit $\mathcal{U} = (U, \in)$ un modèle de $T + \neg\, \mathrm{Coh}(T)$. Alors comme $\mathcal{U} \vDash \mathrm{Coh}(\mathrm{ZFC})$, il existe dans U un modèle $\mathcal{M} = (M, E)$ de ZFC. Comme de plus $\mathcal{U} \vDash \neg Cons(T)$, $\mathcal{M}$ ne peut être un modèle de T, donc nécessairement $\mathcal{M} \vDash \neg\, \mathrm{Coh}(ZFC)$. Ainsi par la question 6, (M, E) n'est pas bien fondée.

   On a donc trouvé un modèle de ZFC qui satisfait $\mathrm{Coh}(ZFC)$ mais dans lequel les propositions équivalentes de la question 3 sont fausses.

Exercice 6 (Lemme de König) **:**
Supposons pour commencer que $\mathcal{G}$ est un arbre. On dit que deux sommets x et y sont ***reliés*** s'il existe un chemin (fini) partant de x et terminant à y. Deux sommets x et y sont voisins si $\{x, y\} \in A$. Soit C l'ensemble des couples $(x, y) \in A^2$ tels que $\{x, y\} \in A$ et tel qu'il existe une infinité de sommets z qui soient reliés à y par un chemin simple ne contenant pas x.
Soit $(x, y) \in C$. Soient $z_1, \ldots, z_n$ les voisins de y, avec $z_1 = x$ et soit $\mathcal{Z}$ l'ensembles des sommets auxquels y est relié par un chemin ne contenant pas x. Pour $k \in \{2, \ldots, n\}$, soit $\mathcal{Z}_k$ l'ensembles des sommets reliés à z_k par un chemin simple ne passant pas par y. Comme le graphe $\mathcal{G}$ ne contient pas de cycles, on a $\mathcal{Z} = \{y\} \cup \bigcup_{k=2,\ldots,n} \mathcal{Z}_k$ (un chemin simple partant de y et ne passant pas par x, doit passer par un et un seul des sommets $z_2, \ldots, z_n$). Il existe donc k tel que $\mathcal{Z}_k$ soit infini. En particulier, il existe z_k, tel que $(y, z_k) \in C$.
Il nous faut montrer que C est non-vide. On peut montrer plus généralement que pour tout x, il existe y tel que $(x, y) \in C$. Le raisonnement est exactement le même que celui du paragraphe précédent : x est relié à une infinité de sommets. Un chemin simple reliant x à un sommet z doit passer d'abord par un des voisins de x. Il existe donc un voisin y de x tel que $(x, y) \in C$.
On définit à présent une partie $\mathcal{R}$ de C^2 par $((x_1, y_1), (x_2, y_2)) \in \mathcal{R}$ si $x_2 = y_1$. Par le paragraphe précédent, pour tout $(x_1, y_1) \in C$, il existe $(x_2, y_2) \in C$ tel que $((x_1, y_1), (x_2, y_2)) \in \mathcal{R}$. Par l'axiome des choix dépendants, il existe une suite $((x_n, y_n))_{n<\omega}$ d'éléments de C telle que $((x_n, y_n), (x_{n+1}, y_{n+1})) \in \mathcal{R}$ pour tout n. On en déduit que $(x_n)_{n<\omega}$ est un chemin dans $\mathcal{G}$. Il est simple puisque par construction, on a $x_n \neq x_{n+2}$ pour tout n et si on avait $x_n = x_m$ pour $m > n + 2$, on pourrait construire un cycle dans $\mathcal{G}$.

Pour le cas général (sans l'hypothèse que $\mathcal{G}$ est un arbre), il y a plusieurs manières de procéder. Une solution serait d'adapter la preuve précédente en ajoutant des conditions pour construire un chemin qui s'éloigne de plus en plus de son point de départ. On présente une autre solution.
On se ramène au cas précédent en extrayant de $\mathcal{G}$ un arbre couvrant maximal (un arbre connexe ayant même ensemble de sommets et dont l'ensemble d'arêtes est un sous-ensemble des arêtes de $\mathcal{G}$). Pour se faire, commencer par remarquer que l'ensemble A des arêtes de $\mathcal{G}$ est dénombrable (ceci utilise l'axiome du choix). On choisit une énumération $A = \{a_0, a_1, \ldots\}$. On construit par récurrence une suite A_n de parties de A.

- On définit $A_0 = A$.
- Si A_n est défini, on considère l'arête a_n. Supposons qu'il existe un cycle dans $\mathcal{G}$ contenant a_n, dont toutes les arêtes appartiennent à $A_n \cap \{a_0, \ldots, a_{n-1}\}$. On pose alors $A_{n+1} = A_n \setminus \{a_n\}$ (on efface l'arête a_n). Sinon, on pose $A_{n+1} = A_n$.

On pose finalement $A_\omega = \bigcap_{n<\omega} A_n$. On considère le graphe $\mathcal{G}'$ dont l'ensemble des sommets est S et l'ensemble des arêtes A_ω. C'est donc un sous-graphe de $\mathcal{G}$. Il est facile de voir qu'il ne contient pas cycle puisque la construction efface au moins une arête par cycle de $\mathcal{G}$. Pour montrer qu'il est connexe, il suffit de montrer que si $x, y \in S$ sont voisins dans $\mathcal{G}$, alors il existe dans $\mathcal{G}'$ un chemin qui les relie. Pour voir cela, soit $a_n = \{x, y\}$. Si $a_n \in A_\omega$, c'est bon. Si $a_n \notin A_\omega$, alors c'est que cette arête a été effacée lors de la construction de A_{n+1}, et cela implique qu'il existe un chemin reliant x à y et composée d'arêtes dans $A_n \cap \{a_0, \ldots, a_{n-1}\}$. Ces arêtes sont toujours présentes dans A_ω.
Le graphe $\mathcal{G}'$ est donc un arbre connexe. Par la question précédente, il existe un chemin infini dans $\mathcal{G}'$, qui est donc aussi un chemin infini de $\mathcal{G}$.

Exercice 7 (Qui sont ces charmants messieurs ?) **:**
De gauche à droite (pour changer) :

- Ernst Zermelo ;
- Abraham Fraenkel, il n'est plus besoin, je pense, de les présenter.
- Dénes König a qui l'on doit le théorème ci-dessus.