Silvain Rideau
Bureau T5

silvain.rideau@ens.fr
www.eleves.ens.fr/home/srideau

TD de Logique 13 (Révisions)

12 et 16 janvier 2015

Les exercices qui ne sont pas abordés en cours, seront (certainement) corrigés sur ma page personelle (voir ci-dessus).

Exercice 1 (Somme naturelle sur les ordinaux) **:**
Soient α et β des ordinaux. On choisit une suite finie d'ordinaux $\gamma_1 > \cdots > \gamma_n$ telle que

$$\alpha = \omega^{\gamma_1} k_1 + \cdots + \omega^{\gamma_n} k_n \quad \text{et} \quad \beta = \omega^{\gamma_1} l_1 + \cdots + \omega^{\gamma_n} l_n$$

avec $k_i, l_i \in \omega$ pour $1 \leqslant i \leqslant n$. La *somme naturelle* de α et β est définie ainsi :

$$\alpha \oplus \beta = \omega^{\gamma_1}(k_1 + l_1) + \cdots + \omega^{\gamma_n}(k_n + l_n)$$

1. Montrer que $\oplus$ est commutative.
2. Montrer que $\beta < \beta'$ entraîne $\alpha \oplus \beta < \alpha \oplus \beta'$ pour tout α.
3. Montrer que $\alpha + \beta \leqslant \alpha \oplus \beta$ pour tout α et β.
4. Montrer que toute opération binaire $\oplus^*$ sur les ordinaux qui est strictement croissante dans les deux arguments est minorée par $\oplus$.

Exercice 2 :
Soit μ un cardinal infini. On définit par induction sur $n \in \omega$ une suite (λ_n) de cardinaux, par

$$\lambda_0 = \mu, \quad \lambda_{n+1} = 2^{\lambda_n}.$$

On pose $\lambda = \sum_{n\in\omega} \lambda_n$.

1. Montrez que $\mu^\lambda = \lambda^\lambda = 2^\lambda$.
2. Montrez que $2^\lambda \leqslant \lambda^{\aleph_0}$.
3. Montrez que pour tout cardinal κ,
   – si $\aleph_0 \leqslant \kappa \leqslant \lambda$, alors $\lambda^{\aleph_0} = \lambda^\kappa = \lambda^\lambda$.
   – si $\kappa \geqslant \lambda$, alors $\lambda^\kappa = 2^\kappa$.
4. Montrez qu'il existe des cardinaux $\alpha < \beta$ et $\gamma < \delta$ tels que $\alpha^\gamma = \beta^\delta$.

Exercice 3 :

1. Soit T une $\mathcal{L}$-théorie et $\mathcal{L}_P := \mathcal{L} \cup \{P\}$, où P est nouveau prédicat unaire. Une $\mathcal{L}_P$-structure M est une *paire élémentaire de modèles de* T si $M|_{\mathcal{L}} \models T$ et si l'ensemble $P^M \subseteq M$ est l'ensemble de base d'une sous-structure élémentaire de $M|_{\mathcal{L}}$.

   Montrer que les paires élémentaires de modèles de T forment une classe élémentaire de $\mathcal{L}_P$-structures. La $\mathcal{L}_P$-théorie correspondante sera notée T_P.
2. Soit $\mathcal{L}_< = \{<\}$ et $\mathsf{OD} = \mathrm{Th}(\langle \mathbb{Q}; < \rangle)$. On rappelle le fait suivant vu en TD : OD élimine les quantificateurs et est égale à est la théorie des ordres (totaux) denses sans extrémités. On note OD_P la théorie des paires élémentaires de modèles de OD (dans le langage $\{<, P\}$).

   On considère la $\{<, P\}$-théorie suivante :

$$T_{dense} = \mathsf{OD}_P \cup \{\forall x \forall y (x < y \to \exists z (x < z < y \wedge Pz))\} \cup \{\forall x \forall y (x < y \to \exists z (x < z < y \wedge \neg Pz))\}$$

a) Donner un modèle de T_{dense}.
b) Montrer que T_{dense} élimine les quantificateurs.
c) En déduire que T_{dense} est complète.
d) Soit $M \vDash T_{dense}$. Montrer que $|M| \leqslant \min\{2^{|P^M|}, |2^{\neg P^M}|\}$.
e) Montrer que pour tout $\kappa \geqslant \aleph_0$ il existe un modèle M de T_{dense} avec $|P^M| = |\neg P^M| = \kappa$.

3. Revenons à la théorie OD_P.
   a) Pour $i = 1, 2$, on considère $M_i = \langle \mathbb{Q}; <, P^{M_i} \rangle \vDash \mathsf{OD}_P$, où $P^{M_1} = \mathbb{Q}_{<0} \cup [1,2) \cup (3,4) \cup (5,6)$ et $P^{M_2} = \mathbb{Q}_{<0} \cup [1,2) \cup [3,4) \cup (5,6)$. Montrer que $M_1 \not\equiv M_2$.
   b) Montrer que OD_P a $2^{\aleph_0}$ complétions (2-à-2 non-équivalentes).
   c) En déduire qu'il existe une complétion de OD_P qui est indécidable.
   d) Exhiber une complétion non récursivement axiomatisable de OD_P.

Exercice 4 (Théorème d'union de chaîne de Tarski) **:**
Soit $(I, <)$ un ensemble ordonné filtrant, c'est à dire un ensemble ordonné tel que pour tout i et $j \in I$, il existe $k \in I$ tel que $i \leqslant k$ et $j \leqslant k$ (par exemple un ordre total). Pour tout $i \in I$, soit M_i une $\mathcal{L}$-structure et supposons que pour tout $i \leqslant j$, M_i est une sous structure de M_j.

1. Montrer qu'on peut munir $M = \bigcup_{i \in I} M_i$ d'une $\mathcal{L}$-structure telle que que pour tout i, M_i soit une sous-structure de M.
2. Supposons que pour tout $i \leqslant j$, $M_i \preccurlyeq M_j$. Montrer que pour tout i, $M_i \preccurlyeq M$.

Exercice 5 (Une bijection primitive récursive d'inverse non primitif récursif) **:**

1. Montrer que l'ensemble des bijections récursives de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ forme un sous-groupe du groupe des permutations de $\mathbb{N}$.
2. Soit $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ une fonction récursive (totale), mais non récursive primitive, et soit i l'indice d'un programme P qui calcule f. On considère la fonction T qui à x associe le temps de calcul de $f(x)$ par P, i.e. $T(x) = \mu t[(i,t,x) \in \mathcal{A}]$. Montrer que le graphe de T est primitif récursif. En déduire qu'il n'y a pas de fonction récursive primitive $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telle que $g(x) \geqslant T(x)$ pour tout $x \in \mathbb{N}$.
3. On pose $g_0(x) = \sup\{T(y); y \leqslant x\} + 2x$. Montrer que g_0 est récursive, mais non primitive récursive, et que le graphe G_0 de g_0 ainsi que l'image I_0 de g_0 sont des ensembles primitifs récursifs.
4. Montrer qu'il existe une (unique) fonction strictement croissante g_1 récursive primitive dont l'image soit égale à $\mathbb{N} \setminus I_0$.
5. Montrer que la fonction $h : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ donnée par $h(2x) = g_0(x)$, $h(2x+1) = g_1(x)$ est bijective, récursive, mais non récursive primitive. Montrer que son inverse h^{-1} est récursive primitive.

Exercice 6 (Fonctions prouvablement totales dans $\mathcal{P}$) **:**
Soit $f \in \mathcal{F}^p$ Σ_1-représentable par $F[\overline{x}, y]$. On dit que f est prouvablement totale dans $\mathcal{P}$ si $\mathcal{P} \vDash \forall \overline{x} \exists y\, F[\overline{x}, y]$.

1. Montrer qu'il existe une fonction récursive (partielle) $h \in \mathcal{F}^2$ telle que
   - si $a = \#F[x_0, x_1]$ où $F[x_0, x_1]$ est Σ_1 et qu'il existe $m \in \mathbb{N}$ tel que $\mathcal{P} \vDash F[\underline{n}, \underline{m}]$, alors $\mathcal{P} \vDash F[\underline{n}, \underline{h(a,n)}]$,
   - si $a = \#F[x_0, x_1]$ où $F[x_0, x_1]$ est Σ_1 et qu'il n'existe pas de $m \in \mathbb{N}$ tel que $\mathcal{P} \vDash F[\underline{n}, \underline{m}]$, alors $h(a,n)$ n'est pas défini,
   - sinon $h(a,n) = 0$.
2. On définit $g \in \mathcal{F}^3$ par :
   - si $a = \#F[x_0, x_1]$ où $F[x_0, x_1]$ est Σ_1 et si b est le code d'une preuve de $\forall x_0 \exists x_1\, F[x_0, x_1]$ dans $\mathcal{P}$ alors $g(a,b,n) = h(a,n)$,
   - sinon $g(a,b,n) = 0$.

   Montrer que g est récursive totale.
3. Montrer qu'il existe des fonctions récursives totales qui ne soient pas prouvablement totales dans $\mathcal{P}$.