Examen

9 avril 2019

Vous pouvez toujours admettre les question précédentes dans les questions suivantes.

Problème 1 :
Soit $\overline{x}$ un uple de variables. On note $\Delta(\overline{x})$ l'ensemble des conjonctions de formules de la forme $\exists t, P(\overline{x}, t) \simeq 0$ où $P \in \mathbb{Z}[\overline{x}, t]$.

1. Soit F et K des corps PPAC, $A \leqslant F$ tel que $A^{\mathrm{a}} \cap F = A$ et $f : A \to K$ un morphisme. Montrer que pour toute extension de corps $A \leqslant C \leqslant F$, il existe $K \preccurlyeq K^\star$ une extension élémentaire et $g : C \to K^\star$ un morphisme qui étend f.
2. Soit $\phi \in \mathcal{F}_{\mathbb{Z}}(\overline{x})$ une formule *existentielle*. Montrer que pour tout corps PPAC F et K, $\overline{a} \in F^{\overline{x}}$ et $\overline{b} \in K^{\overline{x}}$, si $F \vDash \phi(\overline{a})$ et, pour tout $\psi(\overline{x}) \in \Delta(\overline{x})$ tel que $F \vDash \psi(\overline{a})$, on a $K \vDash \psi(\overline{b})$, alors $K \vDash \phi(\overline{b})$.
3. En déduire que ϕ est équivalente modulo PPAC à une formule $\psi(\overline{x}) \in \Delta(\overline{x})$.

Problème 2 :
Soit $K \vDash$ ACF, $X \subseteq K^{\overline{x}}$ K-définissable non vide et $k = \mathrm{acl}^{\mathrm{eq}}(\ulcorner X \urcorner) \cap K$.

1. Montrer que $X \cap k^{\overline{x}} \neq \varnothing$. Vous pourrez procéder par induction sur $|\overline{x}|$.
2. En déduire (sans utiliser l'élimination faible des imaginaires dans ACF), que X est k-définissable.

Problème 3 :
Soit F un corps et $\phi(\overline{x}) \in \mathcal{F}_F(\overline{x})$. Pour tout $n \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$, on définit par induction que $S_1(\phi(F)) \leqslant n$ si :

1. $S_1(\phi(F)) \geqslant 0$ si $\phi(F) \neq \varnothing$;
2. $S_1(\phi(F)) \geqslant n+1$ s'il existe $\psi(\overline{x}, \overline{y}) \in \mathcal{F}_F(\overline{x})$, $F^\star \succcurlyeq F$ et $\overline{b}_i \in (F^\star)^{\overline{y}}$ pour $i \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$ tels que, pour tout i, $S_1(\psi(F^\star, \overline{b}_i) \cap \phi(F^\star)) \geqslant n$ et, pour tout $i \neq j$, $S_1(\psi(F^\star, \overline{b}_i) \cap \psi(F^\star, \overline{b}_j)) < n$.

On dit que $S_1(\phi(F)) = n$ si $S_1(\phi(F)) \geqslant n$ et $S_1(\phi(F)) < n+1$.

1. Soit $F \preccurlyeq F^\star$ une extension élémentaire. Montrer que $S_1(\phi(F)) = S_1(\phi(F^\star))$.
2. Montrer que $S_1(\phi) \geqslant 1$ si et seulement si $\phi(F)$ est infini.
3. Supposons que F est pseudo-fini. Montrer que, pour tout $S_1(\phi(F)) \geqslant \dim(\phi(F))$.
4. En supposant toujours que F est pseudo-fini, montrer que $\dim(\phi(F)) \geqslant S_1(\phi(F))$.