Examen

13/04-24/04

Vous pouvez toujours admettre les question précédentes quand vous répondez à une question.

Problème 1 :
Soit K un corps. Montrez l'équivalence des énoncés suivants :

1. K est borné ;
2. pour toute K-algèbre élémentaire L, $\mathrm{res} : \mathcal{G}(L) \to \mathcal{G}(K)$ est injectif ;
3. pour toute K-algèbre élémentaire L, $\mathrm{res} : \mathcal{G}(L) \to \mathcal{G}(K)$ est un homéomorphisme.

Problème 2 :
Soit $K \vDash \mathrm{PSF}$ et X un ensemble K-définissable.

1. Montrez que $X(K)$ est fini si et seulement si $\dim(X) \leqslant 0$.
2. Si $\dim(X) \leqslant 0$, montrez que $\mu(X) = |X(K)|$.

Problème 3 :

1. Montrez que pour tout corps K et tout idéal $I \subseteq K[X]$, avec $|X| = n$, il y a un nombre fini d'idéaux premiers minimaux (pour l'inclusion) qui contiennent I.

Soient $n, m, d \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$.

2. Montrez qu'il existe $B, D, M \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$ tel que pour tout corps K et tous $(f_i)_{i<m} \in K[X]$, avec $|X| = n$, il existe $(g_{i,j})_{i<M, j<B} \in K[X]$, de degré au plus D, tels que les idéaux $I_j := (g_{i,j} : i < M)$, pour $j < B$, sont exactement les idéaux premiers minimaux (pour l'inclusion) qui contiennent $(f_i : i < m)$.
3. Montrez qu'il existe $B, D, M \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$ tel que pour tout corps K et tous $(f_i)_{i<m} \in K[X]$, avec $|X| = n$, il existe $(g_i)_{i<M} \in K[X]$, de degré au plus D, tels que $(g_i : i < M) = \sqrt{(f_i : i < m)} = \{h \in K[X] : h^B \in (f_i : i < m)\}$.

Problème 4 :
Soit $K \vDash \mathrm{ACF}$ et $F \leqslant K$ un corps.

1. Montrez que $\mathrm{dcl}(F) = F^{p^{-\infty}}$.
2. Soit V une K-variété. Montrez que les énoncés suivants sont équivalents :
   a) $\mathcal{I}_K(V)$ est défini sur $F^{p^{-\infty}}$;
   b) $\mathcal{I}_K(V) = \sqrt{I \cdot K[X]}$ où $I \subseteq F[X]$.
3. Soit V une F-variété F-intègre. Montrez que les énoncés suivants sont équivalents :
   a) V est K-intègre ;
   b) V est F^{s}-intègre ;
   c) $F(V) \cap F^{\mathrm{s}} = F$.