Exercices

10 novembre 2020

Problème 1 :

Soit $F \leqslant K \vDash \mathrm{ACF}$ tel que $|F| < |K|$ où $|\cdot|$ dénote le cardinal.

1. Montrer que $\mathrm{trdeg}_F(K) = |K|$.
2. Montrer que tout $p \in \mathcal{S}_x(F)$ est réalisé dans K.
3. Soient $a, b \in K$ des uples. Montrer que $\mathrm{tp}(a/F) = \mathrm{tp}(b/F)$ si et seulement si il existe $\sigma \in \mathrm{Aut}(K/F)$ tel que $\sigma(a) = \sigma(b)$.

Problème 2 :

Soit A une algèbre, $\Delta \subseteq \mathcal{F}_A(x)$ un ensemble de formules clos par disjonction et conjonction finies. Un ensemble $\pi \subseteq \Delta$ est appelé un Δ-type premier s'il est consistant, clos par implication (pour tout $\varphi \in \Delta$, $\pi(x) \vDash \varphi(x)$ implique $\varphi \in \pi$) et si, pour tout $\varphi_1, \varphi_2 \in \Delta$, $\varphi_1 \vee \varphi_2 \in \pi$ implique qu'il existe i tel que $\varphi_i \in \pi$. On note $\mathcal{S}_\Delta$ l'ensemble des Δ-types premiers muni de la topologie dont une base de fermés est donnée par les $[\varphi] := \{p \in \mathcal{S}_\Delta : \varphi \in p\}$, pour tout $\varphi \in \Delta$.

1. Montrer que $\mathcal{S}_\Delta$ est quasi-compact (de tout recouvrement ouvert on peut extraire un recouvrement fini) et de Kolmogorov (pour toute paire de points x et y, l'adhérence de x et l'adhérence de y sont distinctes).
2. Soit $X \subseteq \mathcal{S}_\Delta$. Montrer l'équivalence des énoncés suivants :
   a) il existe $\varphi \in \Delta$ tel que $X = [\varphi]$;
   b) le complémentaire de X est ouvert quasi-compact.
3. Soit $\Delta^\pm$ la cloture de Δ par combinaisons booléennes. Montrer que la fonction $p \mapsto p|_\Delta := \{\varphi \in \Delta : \varphi \in p\}$ est une bijection continue $\mathcal{S}_{\Delta^\pm} \to \mathcal{S}_\Delta$.
4. Montrer que $\mathcal{S}_\Delta$ est séparé si et seulement si Δ est clos par négation (modulo équivalence logique).
5. Soit $X \subseteq \mathcal{S}_{\Delta^\pm}$ un fermé tel que pour tout $p \in X$, l'adhérence (dans $\mathcal{S}_\Delta$) de $p|_\Delta$ est incluse dans $X|_\Delta := \{p|_\Delta : p \in X\}$. Montrer que $X|_\Delta \subseteq \mathcal{S}_\Delta$ est fermé.
6. Supposons de plus que $X \subseteq \mathcal{S}_{\Delta^\pm}$ est ouvert-fermé. Montrer qu'il existe $\varphi \in \Delta$ tel que $X := [\varphi]$.

Problème 3 :

Soit $F \leqslant K \vDash \mathrm{PAC}_0$ tel que $F \leqslant K$ soit régulière.

1. Soient L, M des F-corps, $f : K \to M$ et $g : L \to M$ des morphismes de F-algèbres tels que $f(K) \downarrow_F^{\mathrm{lin}} g(L)$. Monter que $g(L) \leqslant f(K)g(L)$ est régulière.
2. Montrer qu'il existe une F-algèbre L et deux morphismes élémentaires de F-algèbres $f : K \to L$ et $g : K \to L$ tels que $f(K) \downarrow_F^{\mathrm{lin}} g(K)$.
3. En conclure que pour tout $\varphi \in \mathcal{F}_F(x)$, $\varphi(K)$ est fini si et seulement si $\varphi(K) \subseteq F$.