Partiel

22 Février 2019

Problème 1 :

Soient $F \leqslant K$ une extension de corps avec $K \vDash \mathrm{ACF}$ et $\overline{x}$ un uple de variables. Montrer que les énoncés suivants sont équivalents :

1. Les points de $K^{\overline{x}}$ sont fermés dans la F-topologie de Zariski ;
2. $K = F$.

Problème 2 :

1. Soient $F_i \leqslant K$ une chaîne croissante de sous-corps PAC. Montrer que $\bigcup_i F_i$ est PAC.
2. Soient $F_i \leqslant K$ une chaîne croissante de modèles de PSFG (en particulier ce sont des C-algèbres et les inclusions sont des inclusions de C-algèbres). Montrer que $\bigcup_i F_i \vDash \mathrm{PSFG}$.
3. [Plus difficile] Qu'en est t-il si on considère une chaîne croissante de modèles de PSF ? [Vous pourrez admettre qu'une extension finie de corps PAC est PAC.]

Problème 3 :

Soient $F \leqslant E \leqslant K$ des corps, avec $K \vDash \mathrm{ACF}$ et $p \in \mathcal{S}_{\overline{X}}(E)$. On dit que p est F-définissable, si pour toute formule $\phi \in \mathcal{F}_F(\overline{X}, \overline{Y})$, il existe $\theta \in \mathcal{F}_F(\overline{Y})$ telle que, pour tout $\overline{e} \in E^{\overline{Y}}$,

$$\phi(\overline{X}, \overline{e}) \in p \text{ si et seulement si } K \vDash \theta(\overline{e}).$$

1. Soit V une F-variété absolument irréductible définie sur F. Montrer que le type des éléments E-génériques dans V est F-définissable.

On suppose maintenant $F, E \vDash \mathrm{ACF}$.

2. Pour tout $p \in \mathcal{S}_{\overline{X}}(E)$, montrer que les énoncés suivants sont équivalents :
   a) p est F-définissable ;
   b) pour toute formule $\phi \in \mathcal{F}_F(\overline{X}, \overline{Y})$ et $\overline{e} \in E^{\overline{Y}}$ tel que $\phi(\overline{X}, \overline{e}) \in p$, il existe $\overline{a} \in F$ tel que $\phi(\overline{X}, \overline{a}) \in p$;
   c) pour tout $a \vDash p$ (dans $L \vDash \mathrm{ACF}$ contenant E), $F(a) \mathop{\downarrow}^{\mathrm{lin}}_F E$;
   d) $\mathcal{I}(p) := \{f \in E[\overline{X}] : f \simeq 0 \in p\}$ est défini sur F.

   [Montrez que a ⇒b ⇒c⇒d ⇒a.]
3. Supposons que p soit défini sur F, montrer que pour tout $\phi \in \mathcal{F}_E(\overline{X})$, si $\phi \in p$, il existe $\overline{a} \in F^{\overline{X}}$ tel que $E \vDash \phi(\overline{a})$.

Problème 4 :

Soient F un corps, $\mathfrak{U}$ un ultrafiltre sur un ensemble I. On note $(F^{\mathrm{s}})^{\mathfrak{U}} := \prod_{i \to \mathfrak{U}} F^{\mathrm{s}}$. On définit $\delta(x) := \prod_{i \to \mathfrak{U}} x \in (F^{\mathrm{s}})^{\mathfrak{U}}$.

1. Montrer que $\delta : F \to F^{\mathfrak{U}}$ est élémentaire et que $\delta(F^{\mathrm{s}}) \subseteq (F^{\mathfrak{U}})^{\mathrm{s}}$.
2. Montrer que pour tout élément $\sigma \in \mathcal{G}(F)$ il existe $\sigma^{\mathfrak{U}} \in \mathcal{G}(F^{\mathfrak{U}})$ tel que le diagramme suivant commute :

$$\begin{tikzcd} (F^{\mathfrak{U}})^{\mathrm{s}} \arrow[r, "\sigma^{\mathfrak{U}}"] & (F^{\mathfrak{U}})^{\mathrm{s}} \\ F^{\mathrm{s}} \arrow[u, "\delta"] \arrow[r, "\sigma"'] & F^{\mathrm{s}}. \arrow[u, "\delta"'] \end{tikzcd}$$

3. Soit E un autre corps et $\phi : \mathcal{G}(E) \to \mathcal{G}(F)$ un homéomorphisme. Montrer qu'il existe

un homéomorphisme $\phi^{\mathfrak{U}} : \mathcal{G}(E^{\mathfrak{U}}) \to \mathcal{G}(F^{\mathfrak{U}})$ tel que le diagramme suivant commute :

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{G}(E^{\mathfrak{U}}) \arrow[r, "\phi^{\mathfrak{U}}"] \arrow[d, "\mathcal{G}(\delta)"'] & \mathcal{G}(F^{\mathfrak{U}}) \arrow[d, "\mathcal{G}(\delta)"] \\
\mathcal{G}(E) \arrow[r, "\phi"'] & \mathcal{G}(F),
\end{tikzcd}$$

où $\delta : E^{\mathrm{s}} \to (E^{\mathfrak{U}})^{\mathrm{s}}$ est aussi le morphisme définit par $\delta(e) := \prod_{i \to \mathfrak{U}} e$.

4. Supposons maintenant que $F \leqslant K$ est une extension de corps. Montrer que les énoncés suivants sont équivalents :
   a) F est existentiellement clos dans K ;
   b) il existe un ultrafiltre $\mathfrak{U}$ et un morphisme injectif de F-algèbres $\psi : K \to F^{\mathfrak{U}}$.

   [Pensez à la preuve du théorème de compacité.]
5. Soient $F \leqslant K$ et $E \leqslant L$ des extensions de corps parfaits telles que K et L sont PAC. Soit, de plus, $\phi : F^{\mathrm{a}} \to E^{\mathrm{a}}$ un isomorphisme tel que $\phi(F) = E$ et $\Psi : \mathcal{G}(L) \to \mathcal{G}(K)$ un homéomorphisme tel que le diagramme suivant commute :

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{G}(L) \arrow[r, "\Psi"] \arrow[d, "\mathrm{res}"'] & \mathcal{G}(K) \arrow[d, "\mathrm{res}"] \\
\mathcal{G}(E) \arrow[r, "\mathcal{G}(\phi)"'] & \mathcal{G}(F).
\end{tikzcd}$$

   Montrer que le morphisme $\phi : F \to L$ est alors K-élémentaire.

   [Commencez par montrer que dans le lemme de plongement de Kiehne-Jarden, on peut prendre $M = L^{\mathfrak{U}}$ pour un certain ultrafiltre $\mathfrak{U}$.]