La théorie géométrique des modèles

Comment lier structure et combinatoire

Silvain Rideau-Kikuchi

CNRS, IMJ-PRG, Université de Paris

3 Février 2021

Le théorème de Morley

Théorème (Morley, 1965)

Soit $\mathcal{L}$ un langage dénombrable et T une théorie. S'il existe un cardinal $\kappa > \aleph_0$ tel que T a un unique modèle de cardinal κ, à isomorphisme près, c'est alors aussi le cas pour tout $\kappa > \aleph_0$.

Exemple

- Corps algébriquement clos de caractéristique fixée ;
- Espaces vectoriels sur un corps fixé ;
- Ensemble sans structure.

- T est ω-stable. On peut y définir une dimension, le *rang de Morley* ;
- Les modèles de T sont contrôlés par un ensemble définissable de dimension 1 et multiplicité 1, un ensemble fortement minimal, — tel que les exemples ci-dessus — qui vérifient la conclusion.

Les théorie stables

Soit T une théorie. Sont équivalents :

(i) Il n'existe pas de formule $\phi(x,y)$, $M \vDash T$, $(a_i)_{i\in\mathbb{N}} \in M^x$ et $(b_i)_{i\in\mathbb{N}} \in M^y$ tels que $M \vDash \phi(a_i, b_j)$ si et seulement si $i \leq j$;

(ii) il existe un cardinal λ tel que pour tout $M \vDash T$ de taille λ, il y a au plus λ-types sur M;

(iii) pour tout $M \vDash T$, tous les types sur M sont définissables;

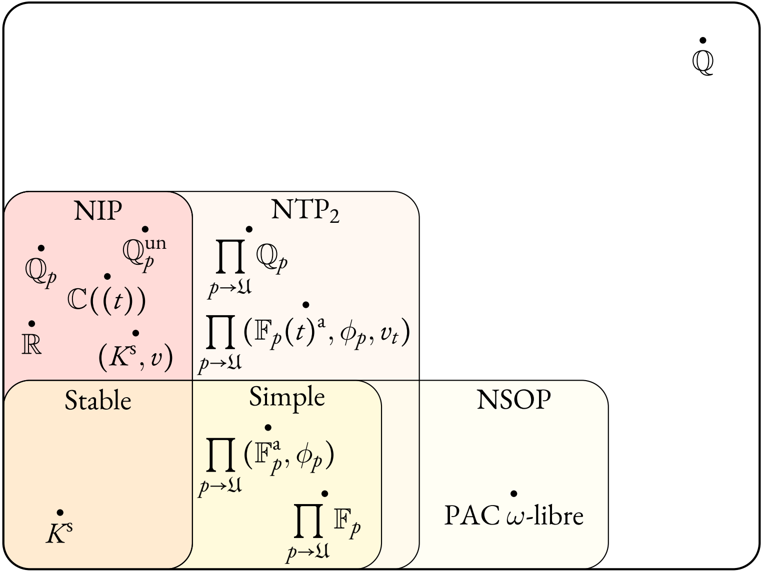
(iv) le rang de Morley local est bien défini;

(v) la déviation est symétrique et tout type sur $M \vDash T$ a une unique extension non déviante.

$$\vdots$$

Une telle théorie est dite stable.

La carte de l'univers



Les théories NIP et les théories simples

- Une théorie est NIP s'il n'existe pas de formule $\phi(x,y)$, $M \models T$, $(a_i)_{i\in\mathbb{N}} \in M^x$ et $(b_i)_{i\in 2^{\mathbb{N}}} \in M^y$ tels que $M \models \phi(a_i, b_j)$ si et seulement si $i \in j$.
  - Les groupes NIP ont un plus petit sous groupe ∞-définissable d'indice borné — une « composante connexe » — et le quotient est un groupe topologique compact.
  - Les corps NIP sont Artin-Schreier clos.
  - La déviation est contrôlée par les types invariants.
- Une théorie est simple s'il n'existe pas de formule $\phi(x,y)$, $k \in \mathbb{N}$, $M \models T$ et $(a_i)_{i\in\mathbb{N}^{<\mathbb{N}}} \in M^y$ tels que, pour tout $\sigma \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$, $\{\phi(x, a_{\sigma|_i}) : i \in \mathbb{N}\}$ est consistant et, pour tout $\tau \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$, $\{\phi(x, a_{\tau i}) : i \in \mathbb{N}\}$ est k-inconsistant.
  - La déviation est symétrique.
  - C'est d'ailleurs l'unique relation d'indépendance $\downarrow$ avec qui vérifie certaines « bonnes propriétés ». Dans un corps pseudo-fini, c'est exactement l'indépendance algébrique.
  - Un corps NTP$_2$, en particulier simple, n'a qu'un nombre fini d'extensions d'Artin-Schreier.

Classification des corps

- Où est $\mathbb{F}_p((t))$?
  - Il n'est ni NTP_2 ni NSOP.
- Où est $\mathbb{C}(t)$?
  - On ne sait pas s'il est stable ou non.
  - $\mathbb{C}(t_1, \ldots, t_n)$, $n \geq 2$ interprète $\mathbb{Q}$.
- Quels sont les corps stables ?
  - Les corps stables de « rang borné » sont algébriquement clos.
- Quels sont les corps simples ?
- Quels sont les corps NIP ?

Conjecture

- Les corps stables infinis sont séparablement clos.
- Les corps simples infinis sont PAC bornés.
- Les corps NIP infinis qui ne sont pas séparablement clos ou réels clos admettent une valuation hensélienne définissable non triviale.

Corps dp-finis

Définition (Fardeau)

- Le fardeau d'une théorie est le cardinal κ maximal tel qu'il existe des formules $(\phi_i(x,y))_{i<\kappa}$, $(k_i)_{i<\kappa} \in \mathbb{N}$, $M \vDash T$, $(a_{i,j})_{i<\kappa, j\in\mathbb{N}}$ tels que, pour tout $\sigma : \kappa \to \mathbb{N}$, $\{\phi(x, a_{i,f(i)}) : i < \lambda\}$ est consistant et, pour tout $i < \kappa$, $\{\phi(x, a_{i,j}) : j \in \mathbb{N}\}$ est k_i-inconsistant.
- Une théorie est NTP_2 si elle est de fardeau $< \infty$.
- Une théorie est dp-finie s'il est NIP de fardeau $< \aleph_0$.

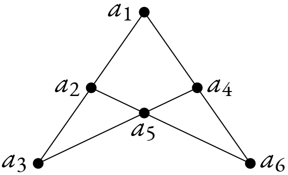
Théorème (Johnson, 2020)

Un corps dp-fini infini qui n'est pas algébriquement clos ou réel clos admet une valuation hensélienne définissable non triviale.

Cela permet de déduire une caractérisation algébrique des corps dp-finis.

La configuration de groupe

Soit T une théorie stable. Une configuration de groupe est :



où $a_i \in M \models T$ tels que :

- si a_i, a_j, a_k sont colinéaires, $a_i \in \mathrm{acl}(a_j a_k)$;
- si a_i, a_j, a_k ne sont colinéaires $a_i \downarrow a_j a_k$.

Exemple

Soit G un groupe définissable dans une théorie stable et g_1, g_2, g_3 trois génériques indépendants de G. Alors $(g_1, g_2, g_2 g_1, g_1^{-1} g_3, g_2 g_3, g_3)$ est une configuration de groupe.

Théorème (Hrushovski)

Soit $(a_i)_{i\leq 6}$ une configuration de groupe dans T stable. Il existe C, un groupe C-définissable G et une configuration associée $(g_i)_{i\leq 6}$ tels que $\mathrm{acl}(Ca_i) = \mathrm{acl}(Cg_i)$, pour tout $i \leq 6$.

- De plus, si deux groupes définissables (dans une théorie stable) ont des configurations inter-algébriques, alors ils sont définissablement virtuellement isogènes.
- Il existe aussi des configurations de groupes abéliens, de corps...
- Un autre pan important de la théorie géométrique des modèles consiste à décrire tous les groupes et corps que l'on peut obtenir de cette manière :
  - un groupe définissable dans un corps PAC borné K est virtuellement isogène aux K-points d'un groupe algébrique sur K.
  - le seul (à isomorphisme définissables près) corps définissable dans un corps algébriquement clos K est K lui-même.
  - les deux seuls corps interprétables dans un corps algébriquement clos valué (K, v) sont K et son corps de résidus.

Autour d'un théorème d'Elekes-Szabó

Théorème (Chernikov–Starchenko, 2018)

Soient $(X_i)_{i\leq 3}$ fortement minimaux interprétable dans une structure distale, $F \subseteq X_1 \times X_2 \times X_3$ définissable de rang de Morley 2. L'un des énoncés suivant est vérifié :

(i) il existe $\epsilon > 0$ tels que pour tous $A_i \subseteq X_i$ de taille $\leq n$, $\left|F \cap \prod_i A_i\right| = O\left(n^{2-\epsilon}\right)$;

(ii) À permutation des indices près, il existe $S \subseteq X_1$ et $R \subseteq X_2 \times X_3$ infinis tels que $S \times R \subseteq F$;

(iii) Il existe C, un groupe abélien C-définissable G fortement minimal, $g_i \in G$ et $a_i \in X$ tels que $\prod_i g_i = 1$, $\mathrm{acl}(Cg_i) = \mathrm{acl}(Ca_i)$ et $a_1a_2a_3$ est générique dans F sur C — *i.e.* $\mathrm{RM}(a_1a_2a_3/C) = 2$.