Imaginaires dans les corps henséliens de charactéristique zéro

et applications aux questions de rationalités de certaines fonctions zêta locales

Silvain Rideau

CNRS, IMJ-PRG, Université Paris Diderot

7 juin 2018

Corps henséliens

- Une valuation sur un corps K est un morphisme de groupe $\mathrm{v} : K^\star \to \Gamma$, où $(\Gamma, \cdot, <)$ un groupe abélien ordonné, tel que:

$$\forall x, y \in K,\ \mathrm{v}(x+y) \leq \max(\mathrm{v}(x), \mathrm{v}(y)).$$

Par convention $\mathrm{v}(0) = 0 < \Gamma$.

Corps henséliens

- Une valuation sur un corps K est un morphisme de groupe $\mathrm{v} : K^\star \to \Gamma$, où $(\Gamma, \cdot, <)$ un groupe abélien ordonné, tel que:

$$\forall x, y \in K,\ \mathrm{v}(x+y) \leq \max(\mathrm{v}(x), \mathrm{v}(y)).$$

  Par convention $\mathrm{v}(0) = 0 < \Gamma$.
- On note:
  - $\mathcal{O} := \{x \in K \mid \mathrm{v}(x) \leq 1\}$ l'anneau de valuation;

Corps henséliens

- Une valuation sur un corps K est un morphisme de groupe $\mathrm{v} : K^\star \to \Gamma$, où $(\Gamma, \cdot, <)$ un groupe abélien ordonné, tel que:

$$\forall x, y \in K,\ \mathrm{v}(x + y) \leq \max(\mathrm{v}(x), \mathrm{v}(y)).$$

  Par convention $\mathrm{v}(0) = 0 < \Gamma$.
- On note:
  - $\mathcal{O} := \{x \in K \mid \mathrm{v}(x) \leq 1\}$ l'anneau de valuation;
  - $\mathfrak{m} := \{x \in K \mid \mathrm{v}(x) < 1\}$ son unique idéal maximal;

Corps henséliens

- Une valuation sur un corps K est un morphisme de groupe $\mathrm{v} : K^\star \to \Gamma$, où $(\Gamma, \cdot, <)$ un groupe abélien ordonné, tel que:

$$\forall x, y \in K,\ \mathrm{v}(x+y) \leq \max(\mathrm{v}(x), \mathrm{v}(y)).$$

  Par convention $\mathrm{v}(0) = 0 < \Gamma$.
- On note:
  - $\mathcal{O} := \{x \in K \mid \mathrm{v}(x) \leq 1\}$ l'anneau de valuation;
  - $\mathfrak{m} := \{x \in K \mid \mathrm{v}(x) < 1\}$ son unique idéal maximal;
  - $k := \mathcal{O}/\mathfrak{m}$ le corps résiduel.

Corps henséliens

- Une valuation sur un corps K est un morphisme de groupe $\mathrm{v} : K^\star \to \Gamma$, où $(\Gamma, \cdot, <)$ un groupe abélien ordonné, tel que:

$$\forall x, y \in K,\ \mathrm{v}(x+y) \leq \max(\mathrm{v}(x), \mathrm{v}(y)).$$

  Par convention $\mathrm{v}(0) = 0 < \Gamma$.
- On note:
  - $\mathcal{O} := \{x \in K \mid \mathrm{v}(x) \leq 1\}$ l'anneau de valuation;
  - $\mathfrak{m} := \{x \in K \mid \mathrm{v}(x) < 1\}$ son unique idéal maximal;
  - $k := \mathcal{O}/\mathfrak{m}$ le corps résiduel.
- Un corps valué est hensélien si pour tout $P \in \mathcal{O}[X]$ et $a \in \mathcal{O}$,
  $\mathrm{v}(P(a)) < 1 = \mathrm{v}(P'(a)) \Rightarrow \exists b \in \mathrm{v}, P(b) = 0 \wedge \mathrm{v}(a-b) < 1.$

Corps henséliens

- Une valuation sur un corps K est un morphisme de groupe $\mathrm{v} : K^{\star} \to \Gamma$, où $(\Gamma, \cdot, <)$ un groupe abélien ordonné, tel que:

$$\forall x, y \in K,\ \mathrm{v}(x+y) \leq \max(\mathrm{v}(x), \mathrm{v}(y)).$$

  Par convention $\mathrm{v}(0) = 0 < \Gamma$.
- On note:
  - $\mathcal{O} := \{x \in K \mid \mathrm{v}(x) \leq 1\}$ l'anneau de valuation;
  - $\mathfrak{m} := \{x \in K \mid \mathrm{v}(x) < 1\}$ son unique idéal maximal;
  - $k := \mathcal{O}/\mathfrak{m}$ le corps résiduel.
- Un corps valué est hensélien si pour tout $P \in \mathcal{O}[X]$ et $a \in \mathcal{O}$, $\mathrm{v}(P(a)) < 1 = \mathrm{v}(P'(a)) \Rightarrow \exists b \in \mathrm{v}, P(b) = 0 \wedge \mathrm{v}(a-b) < 1.$

Example

- $k((t))$, le corps des séries de Laurent sur k;

Corps henséliens

- Une valuation sur un corps K est un morphisme de groupe $\mathrm{v} : K^\star \to \Gamma$, où $(\Gamma, \cdot, <)$ un groupe abélien ordonné, tel que:

$$\forall x, y \in K,\ \mathrm{v}(x+y) \leq \max(\mathrm{v}(x), \mathrm{v}(y)).$$

  Par convention $\mathrm{v}(0) = 0 < \Gamma$.
- On note:
  - $\mathcal{O} := \{x \in K \mid \mathrm{v}(x) \leq 1\}$ l'anneau de valuation;
  - $\mathfrak{m} := \{x \in K \mid \mathrm{v}(x) < 1\}$ son unique idéal maximal;
  - $k := \mathcal{O}/\mathfrak{m}$ le corps résiduel.
- Un corps valué est hensélien si pour tout $P \in \mathcal{O}[X]$ et $a \in \mathcal{O}$,
  $\mathrm{v}(P(a)) < 1 = \mathrm{v}(P'(a)) \Rightarrow \exists b \in \mathrm{v}, P(b) = 0 \wedge \mathrm{v}(a-b) < 1.$

Example

- $k((t))$, le corps des séries de Laurent sur k;
- $\mathbb{Q}_p$ la complétion de $\mathbb{Q}$ pour la valuation p-adique;

Corps henséliens

- Une valuation sur un corps K est un morphisme de groupe $\mathrm{v} : K^\star \to \Gamma$, où $(\Gamma, \cdot, <)$ un groupe abélien ordonné, tel que:

$$\forall x, y \in K,\ \mathrm{v}(x+y) \leq \max(\mathrm{v}(x), \mathrm{v}(y)).$$

  Par convention $\mathrm{v}(0) = 0 < \Gamma$.
- On note:
  - $\mathcal{O} := \{x \in K \mid \mathrm{v}(x) \leq 1\}$ l'anneau de valuation;
  - $\mathfrak{m} := \{x \in K \mid \mathrm{v}(x) < 1\}$ son unique idéal maximal;
  - $k := \mathcal{O}/\mathfrak{m}$ le corps résiduel.
- Un corps valué est hensélien si pour tout $P \in \mathcal{O}[X]$ et $a \in \mathcal{O}$, $\mathrm{v}(P(a)) < 1 = \mathrm{v}(P'(a)) \Rightarrow \exists b \in \mathrm{v}, P(b) = 0 \wedge \mathrm{v}(a-b) < 1.$

Example

- $k((t))$, le corps des séries de Laurent sur k;
- $\mathbb{Q}_p$ la complétion de $\mathbb{Q}$ pour la valuation p-adique;
- Tout corps séparablement clos valué.

Imaginaires

La théorie des modèles est l'étude des ensemble définissables.

Imaginaires

La théorie des modèles est l'étude des ensemble définissables.

Example

Dans un corps valué K, ce sont les combinaisons booléennes et projections d'ensembles de la forme $\mathrm{v}(P(\overline{X})) \leq \mathrm{v}(Q(\overline{X}))$ avec $P, Q \in \mathbb{Z}[\overline{X}]$.

Imaginaires

La théorie des modèles est l'étude des ensemble définissables.

Example

Dans un corps valué K, ce sont les combinaisons booléennes et projections d'ensembles de la forme $\mathrm{v}(P(\overline{X})) \leq \mathrm{v}(Q(\overline{X}))$ avec $P, Q \in \mathbb{Z}[\overline{X}]$.

- Un des problèmes qui se pose est l'existence d'espaces de modules.

La théorie des modèles est l'étude des ensemble définissables.

Example

Dans un corps valué K, ce sont les combinaisons booléennes et projections d'ensembles de la forme $\mathrm{v}(P(\overline{X})) \leq \mathrm{v}(Q(\overline{X}))$ avec $P, Q \in \mathbb{Z}[\overline{X}]$.

- Un des problèmes qui se pose est l'existence d'espaces de modules.
- Soit $X \subseteq Y \times Z$ des ensembles définissables. On cherche une fonction définissable $f : Y \to W$ telle que pour tout $y_1, y_2 \in Y$,
$$f(y_1) = f(y_2) \Leftrightarrow X_{y_1} := \{z \in Z \mid (y_1, z) \in X\} = X_{y_2}.$$

Imaginaires

La théorie des modèles est l'étude des ensemble définissables.

Example

Dans un corps valué K, ce sont les combinaisons booléennes et projections d'ensembles de la forme $\mathrm{v}(P(\overline{X})) \leq \mathrm{v}(Q(\overline{X}))$ avec $P, Q \in \mathbb{Z}[\overline{X}]$.

- Un des problèmes qui se pose est l'existence d'espaces de modules.
- Soit $X \subseteq Y \times Z$ des ensembles définissables. On cherche une fonction définissable $f : Y \to W$ telle que pour tout $y_1, y_2 \in Y$,
$$f(y_1) = f(y_2) \Leftrightarrow X_{y_1} := \{z \in Z \mid (y_1, z) \in X\} = X_{y_2}.$$
- Si cela est possible, on parle d'élimination des imaginaires.

Imaginaires

La théorie des modèles est l'étude des ensemble définissables.

Example

Dans un corps valué K, ce sont les combinaisons booléennes et projections d'ensembles de la forme $\mathrm{v}(P(\overline{X})) \leq \mathrm{v}(Q(\overline{X}))$ avec $P, Q \in \mathbb{Z}[\overline{X}]$.

- Un des problèmes qui se pose est l'existence d'espaces de modules.
- Soit $X \subseteq Y \times Z$ des ensembles définissables. On cherche une fonction définissable $f : Y \to W$ telle que pour tout $y_1, y_2 \in Y$,
$$f(y_1) = f(y_2) \Leftrightarrow X_{y_1} := \{z \in Z \mid (y_1, z) \in X\} = X_{y_2}.$$
- Si cela est possible, on parle d'élimination des imaginaires.

Théorème (Poizat, 1983)

Tout corps algébriquement clos trivialement valué élimine les imaginaires.

Imaginaires dans les corps valués

- Dans un corps hensélien non trivialement valué certains imaginaires ne peuvent pas être éliminés:

Imaginaires dans les corps valués

- Dans un corps hensélien non trivialement valué certains imaginaires ne peuvent pas être éliminés:
  - $\Gamma = K^{\star}/\mathcal{O}^{\star}$;

Imaginaires dans les corps valués

- Dans un corps hensélien non trivialement valué certains imaginaires ne peuvent pas être éliminés:
  - $\Gamma = K^\star / \mathcal{O}^\star$;
  - $k = \mathcal{O}/\mathfrak{m}$;

Imaginaires dans les corps valués

- Dans un corps hensélien non trivialement valué certains imaginaires ne peuvent pas être éliminés:
  - $\Gamma = K^\star/\mathcal{O}^\star$;
  - $k = \mathcal{O}/\mathfrak{m}$;
  - $S_n := \mathrm{GL}_n(K)/\mathrm{GL}_n(\mathcal{O})$;

Imaginaires dans les corps valués

- Dans un corps hensélien non trivialement valué certains imaginaires ne peuvent pas être éliminés:
  - $\Gamma = K^\star/\mathcal{O}^\star$;
  - $k = \mathcal{O}/\mathfrak{m}$;
  - $S_n := \mathrm{GL}_n(K)/\mathrm{GL}_n(\mathcal{O})$;
  - $T_n := \coprod_{s \in S_n} \mathcal{O}s/\mathfrak{m}s$.

Imaginaires dans les corps valués

- Dans un corps hensélien non trivialement valué certains imaginaires ne peuvent pas être éliminés:
  - $\Gamma = K^\star/\mathcal{O}^\star$ (et ses imaginaires);
  - $k = \mathcal{O}/\mathfrak{m}$ (et ses imaginaires);
  - $S_n := \mathrm{GL}_n(K)/\mathrm{GL}_n(\mathcal{O})$;
  - $T_n := \coprod_{s\in S_n} \mathcal{O}s/\mathfrak{m}s$.

Imaginaires dans les corps valués

- Dans un corps hensélien non trivialement valué certains imaginaires ne peuvent pas être éliminés:
  - $\Gamma = K^\star/\mathcal{O}^\star$ (et ses imaginaires);
  - $k = \mathcal{O}/\mathfrak{m}$ (et ses imaginaires);
  - $S_n := \mathrm{GL}_n(K)/\mathrm{GL}_n(\mathcal{O})$;
  - $T_n := \coprod_{s\in S_n} \mathcal{O}s/\mathfrak{m}s$.
- Mais c'est essentiellement les seules obstructions:

Imaginaires dans les corps valués

- Dans un corps hensélien non trivialement valué certains imaginaires ne peuvent pas être éliminés:
  - $\Gamma = K^\star/\mathcal{O}^\star$ (et ses imaginaires);
  - $k = \mathcal{O}/\mathfrak{m}$ (et ses imaginaires);
  - $S_n := \mathrm{GL}_n(K)/\mathrm{GL}_n(\mathcal{O})$;
  - $T_n := \coprod_{s\in S_n} \mathcal{O}s/\mathfrak{m}s$.
- Mais c'est essentiellement les seules obstructions:

Conjecture (Fausse)

Tout corps hensélien (K, v) de caractéristique nulle élimine les imaginaires si l'on rajoute les ensembles S_n et T_n pour tout $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ ainsi que les imaginaires de Γ et k.

Imaginaires dans les corps valués

- Dans un corps hensélien non trivialement valué certains imaginaires ne peuvent pas être éliminés:
  - $\Gamma = K^\star/\mathcal{O}^\star$ (et ses imaginaires);
  - $k = \mathcal{O}/\mathfrak{m}$ (et ses imaginaires);
  - $S_n := \mathrm{GL}_n(K)/\mathrm{GL}_n(\mathcal{O})$;
  - $T_n := \bigsqcup_{s \in S_n} \mathcal{O}s/\mathfrak{m}s$.
- Mais c'est essentiellement les seules obstructions:

Conjecture (Fausse)

Tout corps hensélien (K, v) de caractéristique nulle élimine les imaginaires si l'on rajoute les ensembles S_n et T_n pour tout $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ ainsi que les imaginaires de Γ et k.

- C'est une version, pour les imaginaires, du principe d'Ax-Kochen-Ershov.

Résultats connus

Théorème

- (Haskell-Hrushovski-Macpherson, 2006) Les corps algébriquement clos valués éliminent les imaginaires si l'on rajoute les ensembles S_n et T_n pour tout $n \in \mathbb{Z}_{>0}$.

Résultats connus

Théorème

- (Haskell-Hrushovski-Macpherson, 2006) Les corps algébriquement clos valués éliminent les imaginaires si l'on rajoute les ensembles S_n et T_n pour tout $n \in \mathbb{Z}_{>0}$.
- (Hils-Kamenski-R., 2016) Les corps séparablement clos valués de degré d'imperfection fini éliminent les imaginaires si l'on rajoute les ensembles S_n et T_n pour tout $n \in \mathbb{Z}_{>0}$.

Résultats connus

Théorème

- (Haskell-Hrushovski-Macpherson, 2006) Les corps algébriquement clos valués éliminent les imaginaires si l'on rajoute les ensembles S_n et T_n pour tout $n \in \mathbb{Z}_{>0}$.
- (Hils-Kamenski-R., 2016) Les corps séparablement clos valués de degré d'imperfection fini éliminent les imaginaires si l'on rajoute les ensembles S_n et T_n pour tout $n \in \mathbb{Z}_{>0}$.
- (Hrushovski-Martin-R., 2014) Les corps locaux non-archimédiens de caractéristique nulle éliminent les imaginaires si l'on rajoute les ensembles S_n pour tout $n \in \mathbb{Z}_{>0}$.

Résultats connus

Théorème

- (Haskell-Hrushovski-Macpherson, 2006) Les corps algébriquement clos valués éliminent les imaginaires si l'on rajoute les ensembles S_n et T_n pour tout $n \in \mathbb{Z}_{>0}$.
- (Hils-Kamenski-R., 2016) Les corps séparablement clos valués de degré d'imperfection fini éliminent les imaginaires si l'on rajoute les ensembles S_n et T_n pour tout $n \in \mathbb{Z}_{>0}$.
- (Hrushovski-Martin-R., 2014) Les corps locaux non-archimédiens de caractéristique nulle éliminent les imaginaires si l'on rajoute les ensembles S_n pour tout $n \in \mathbb{Z}_{>0}$.
- (Hrushovski-Martin-R., 2014) Les ultraproduits de caractéristique résiduelle nulle de corps locaux non-archimédiens (autrement dit les corps de séries de Laurent sur les corps pseudo-finis) éliminent éliminent les imaginaires si l'on rajoute les ensembles S_n pour tout $n \in \mathbb{Z}_{>0}$.

Comptages des sous-groupes et des représentations

Soit G un groupe nilpotent finiment engendré.

Comptages des sous-groupes et des représentations

Soit G un groupe nilpotent finiment engendré.

- On note a_n soit:
  - le nombre de sous-groupes de Γ d'indice n;

Comptages des sous-groupes et des représentations

Soit G un groupe nilpotent finiment engendré.

- On note a_n soit:
  - le nombre de sous-groupes de Γ d'indice n;
  - le nombre de caractères irréductibles de G de dimension n, à multiplication par un caractère linéaire près;

Comptages des sous-groupes et des représentations

Soit G un groupe nilpotent finiment engendré.

- On note a_n soit:
  - le nombre de sous-groupes de Γ d'indice n;
  - le nombre de caractères irréductibles de G de dimension n, à multiplication par un caractère linéaire près;
- On note $\zeta_G(s) := \sum_{n>0} a_n n^{-s}$ et $S_{G,p}(t) := \sum_{n>0} a_{p^n} t^n$. On a:

$$\zeta_G(s) = \prod_p S_{G,p}(p^{-s}).$$

Comptages des sous-groupes et des représentations

Soit G un groupe nilpotent finiment engendré.

- On note a_n soit:
  - le nombre de sous-groupes de Γ d'indice n;
  - le nombre de caractères irréductibles de G de dimension n, à multiplication par un caractère linéaire près;
- On note $\zeta_G(s) := \sum_{n>0} a_n n^{-s}$ et $S_{G,p}(t) := \sum_{n>0} a_{p^n} t^n$. On a:

$$\zeta_G(s) = \prod_p S_{G,p}(p^{-s}).$$

Proposition (Hrushovski-Martin-R., 2014)

Il existe un ensemble définissable $X_p \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Q}_p^m$ et $E_p \subseteq X_p \times X_p$ une relation d'équivalence définissable (uniformément en p) tels que pour tout $n \in \mathbb{Z}_{>0}$, $a_{p^n} = |(X_p)_n / E_p|$.

Rationalité des séries de comptage

Théorème (Denef, 1984)

Soit $X_p \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Q}_p^m$ un ensemble définissable tel que, pour tout $n \in \mathbb{Z}_{>0}$, $a_n := |(X_p)_n| < \infty$. Alors $\sum_{n>0} a_n t^n \in \mathbb{Q}(t)$.

Rationalité des séries de comptage

Théorème (Hrushovski-Martin-R., 2014)

Soit $X_p \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Q}_p^m$ un ensemble définissable et $E_p \subseteq X_p \times X_p$ une relation d'équivalence définissable tels que, pour tout $n \in \mathbb{Z}_{>0}$, $a_n := |(X_p)_n / E_p| < \infty$. Alors $\sum_{n>0} a_n t^n \in \mathbb{Q}(t)$.

Théorème (Hrushovski-Martin-R., 2014)

Soit $X_p \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Q}_p^m$ un ensemble définissable et $E_p \subseteq X_p \times X_p$ une relation d'équivalence définissable tels que, pour tout $n \in \mathbb{Z}_{>0}$, $a_n := |(X_p)_n / E_p| < \infty$. Alors $\sum_{n>0} a_n t^n \in \mathbb{Q}(t)$.

Si X_p et E_p sont définis uniformément en p, la rationalité est aussi uniforme:

Rationalité des séries de comptage

Théorème (Hrushovski-Martin-R., 2014)

Soit $X_p \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Q}_p^m$ un ensemble définissable et $E_p \subseteq X_p \times X_p$ une relation d'équivalence définissable tels que, pour tout $n \in \mathbb{Z}_{>0}$, $a_n := |(X_p)_n/E_p| < \infty$. Alors $\sum_{n>0} a_n t^n \in \mathbb{Q}(t)$.

Si X_p et E_p sont définis uniformément en p, la rationalité est aussi uniforme:

- Le degré du numérateur et du dénominateur est borné uniformément en p;

Rationalité des séries de comptage

Théorème (Hrushovski-Martin-R., 2014)

Soit $X_p \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Q}_p^m$ un ensemble définissable et $E_p \subseteq X_p \times X_p$ une relation d'équivalence définissable tels que, pour tout $n \in \mathbb{Z}_{>0}$, $a_n := |(X_p)_n/E_p| < \infty$. Alors $\sum_{n>0} a_n t^n \in \mathbb{Q}(t)$.

Si X_p et E_p sont définis uniformément en p, la rationalité est aussi uniforme:

- Le degré du numérateur et du dénominateur est borné uniformément en p;
- Les coefficients de la fonction rationnelle sont de la forme $|V(\mathbb{F}_p)|$ où V est une variété définie sur $\mathbb{Z}$ indépendante de p;

Rationalité des séries de comptage

Théorème (Hrushovski-Martin-R., 2014)

Soit $X_p \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Q}_p^m$ un ensemble définissable et $E_p \subseteq X_p \times X_p$ une relation d'équivalence définissable tels que, pour tout $n \in \mathbb{Z}_{>0}$, $a_n := |(X_p)_n / E_p| < \infty$. Alors $\sum_{n>0} a_n t^n \in \mathbb{Q}(t)$.

Si X_p et E_p sont définis uniformément en p, la rationalité est aussi uniforme:

- Le degré du numérateur et du dénominateur est borné uniformément en p;
- Les coefficients de la fonction rationnelle sont de la forme $|V(\mathbb{F}_p)|$ où V est une variété définie sur $\mathbb{Z}$ indépendante de p;
- Les pôles sont de la forme p^r, avec $r \in \mathbb{Q}$ indépendant de p.

Rationalité des séries de comptage

Théorème (Hrushovski-Martin-R., 2014)

Soit $X_p \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Q}_p^m$ un ensemble définissable et $E_p \subseteq X_p \times X_p$ une relation d'équivalence définissable tels que, pour tout $n \in \mathbb{Z}_{>0}$, $a_n := |(X_p)_n / E_p| < \infty$. Alors $\sum_{n>0} a_n t^n \in \mathbb{Q}(t)$.

Si X_p et E_p sont définis uniformément en p, la rationalité est aussi uniforme:

- Le degré du numérateur et du dénominateur est borné uniformément en p;
- Les coefficients de la fonction rationnelle sont de la forme $|V(\mathbb{F}_p)|$ où V est une variété définie sur $\mathbb{Z}$ indépendante de p;
- Les pôles sont de la forme p^r, avec $r \in \mathbb{Q}$ indépendant de p.

Théorème (Hrushovski-Martin-R., 2014)

- La série $S_{G,p}(t)$ est rationnelle en t (uniformément en p).

Rationalité des séries de comptage

Théorème (Hrushovski-Martin-R., 2014)

Soit $X_p \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Q}_p^m$ un ensemble définissable et $E_p \subseteq X_p \times X_p$ une relation d'équivalence définissable tels que, pour tout $n \in \mathbb{Z}_{>0}$, $a_n := |(X_p)_n / E_p| < \infty$. Alors $\sum_{n>0} a_n t^n \in \mathbb{Q}(t)$.

Si X_p et E_p sont définis uniformément en p, la rationalité est aussi uniforme:

- Le degré du numérateur et du dénominateur est borné uniformément en p;
- Les coefficients de la fonction rationnelle sont de la forme $|V(\mathbb{F}_p)|$ où V est une variété définie sur $\mathbb{Z}$ indépendante de p;
- Les pôles sont de la forme p^r, avec $r \in \mathbb{Q}$ indépendant de p.

Théorème (Hrushovski-Martin-R., 2014)

- La série $S_{G,p}(t)$ est rationnelle en t (uniformément en p).
- L'abscisse de convergence de ζ_G est rationnelle.