Imaginaires dans les corps Henséliens

travail en commun avec Martin Hils

Silvain Rideau

CNRS, IMJ-PRG, Université Paris Diderot

Novembre 2018

Les sortes

Les sortes

- Les sortes géométriques $\mathcal{G}$:
  - K;
  - $\mathrm{Lat}_n := \mathrm{GL}_n(K)/\mathrm{GL}_n(\mathcal{O})$;
  - $\mathrm{Tor}_n := \mathrm{GL}_n(K)/\mathrm{GL}_{n,n}(\mathcal{O}) = \coprod_{s \in \mathrm{Lat}_n} s/\mathfrak{m}s$.

  On a une fonction $\tau_n : \mathrm{Tor}_n \to \mathrm{Lat}_n$.

Les sortes

- Les sortes géométriques $\mathcal{G}$:
  - K;
  - $\mathrm{Lat}_n := \mathrm{GL}_n(K)/\mathrm{GL}_n(\mathcal{O})$;
  - $\mathrm{Tor}_n := \mathrm{GL}_n(K)/\mathrm{GL}_{n,n}(\mathcal{O}) = \coprod_{s \in \mathrm{Lat}_n} s/\mathfrak{m}s$.

  On a une fonction $\tau_n : \mathrm{Tor}_n \to \mathrm{Lat}_n$.
- Les imaginaires du groupe de valeur: Γ^{eq}.

Les sortes

- Les sortes géométriques $\mathcal{G}$:
  - K;
  - $\mathrm{Lat}_n := \mathrm{GL}_n(K)/\mathrm{GL}_n(\mathcal{O})$;
  - $\mathrm{Tor}_n := \mathrm{GL}_n(K)/\mathrm{GL}_{n,n}(\mathcal{O}) = \coprod_{s\in\mathrm{Lat}_n} s/\mathfrak{m}s$.

  On a une fonction $\tau_n : \mathrm{Tor}_n \to \mathrm{Lat}_n$.
- Les imaginaires du groupe de valeur: Γ^{eq}.
- Les imaginaires linéaires uniformes:
  - Soit $\mathcal{L}_{\mathrm{vs}}$ le langage a deux sortes k et V des k-espaces vectoriels.
  - À tout ensemble $X \subseteq V^2$ qui est $\mathcal{L}_{\mathrm{vs}}$-définissable, on associe

$$\mathrm{Tor}_{n,X} := \coprod_{s\in\mathrm{Lat}_n} \tau_n^{-1}(s)/\sim_X^s,$$

    où $y_1 \sim_X^s y_2$ si $X_{y_1}^{(k,\tau_n^{-1}(s))} = X_{y_2}^{(k,\tau_n^{-1}(s))}$.

  On a une fonction $\tau_{n,X} : \mathrm{Tor}_{n,X} \to \mathrm{Lat}_n$.

Densité des types sans quantificateurs définissables

Densité des types sans quantificateurs définissables

Soit $T_0 = \mathrm{ACVF}_{0,0}$ et $T \supseteq T_{0,\forall}$.

Densité des types sans quantificateurs définissables

Soit $T_0 = \mathrm{ACVF}_{0,0}$ et $T \supseteq T_{0,\forall}$.

Theorem

Alors pour tout $M \models T$, x-dénombrable et $X \subseteq K^x$ strict pro-$\mathcal{L}(M)$-définissable, il existe un type $p \in \mathcal{S}^0_x(M)$ qui est $\mathcal{L}(\mathcal{G}(\mathrm{acl}(\ulcorner X \urcorner)))$-définissable et consistant avec X.

Densité des types sans quantificateurs définissables

Soit $T_0 = \mathrm{ACVF}_{0,0}$ et $T \supseteq T_{0,\forall}$.

Theorem

Supposons:

1. $\mathrm{v}(K \cdot \mathrm{dcl}(\emptyset)^{\mathrm{alg}})$ est divisible;

Alors pour tout $M \models T$, x-dénombrable et $X \subseteq K^x$ strict pro-$\mathcal{L}(M)$-définissable, il existe un type $p \in \mathcal{S}^0_x(M)$ qui est $\mathcal{L}(\mathcal{G}(\mathrm{acl}(\ulcorner X \urcorner)))$-définissable et consistant avec X.

Densité des types sans quantificateurs définissables

Soit $T_0 = \mathrm{ACVF}_{0,0}$ et $T \supseteq T_{0,\forall}$.

Theorem

Supposons:

1. $\mathrm{v}(K \cdot \mathrm{dcl}(\emptyset)^{\mathrm{alg}})$ est divisible;
2. Γ est définissablement complet dans la paire (K^{alg}, K);

Alors pour tout $M \models T$, x-dénombrable et $X \subseteq K^x$ strict pro-$\mathcal{L}(M)$-définissable, il existe un type $p \in \mathcal{S}_x^0(M)$ qui est $\mathcal{L}(\mathcal{G}(\mathrm{acl}(\ulcorner X \urcorner)))$-définissable et consistant avec X.

Densité des types sans quantificateurs définissables

Soit $T_0 = \mathrm{ACVF}_{0,0}$ et $T \supseteq T_{0,\forall}$.

Theorem

Supposons:

1. $\mathrm{v}(K \cdot \mathrm{dcl}(\emptyset)^{\mathrm{alg}})$ est divisible;
2. Γ est définissablement complet dans la paire (K^{alg}, K);
3. T a un modèle maximalement complet;

Alors pour tout $M \models T$, x-dénombrable et $X \subseteq K^x$ strict pro-$\mathcal{L}(M)$-définissable, il existe un type $p \in \mathcal{S}^0_x(M)$ qui est $\mathcal{L}(\mathcal{G}(\mathrm{acl}(\ulcorner X \urcorner)))$-définissable et consistant avec X.

Densité des types sans quantificateurs définissables

Soit $T_0 = \mathrm{ACVF}_{0,0}$ et $T \supseteq T_{0,\forall}$.

Theorem

Supposons:

1. $\mathrm{v}(K \cdot \mathrm{dcl}(\emptyset)^{\mathrm{alg}})$ est divisible;
2. Γ est définissablement complet dans la paire (K^{alg}, K);
3. T a un modèle maximalement complet;
4. la structure induite sur k élimine $\exists^\infty$;

Alors pour tout $M \models T$, x-dénombrable et $X \subseteq K^x$ strict pro-$\mathcal{L}(M)$-définissable, il existe un type $p \in \mathcal{S}^0_x(M)$ qui est $\mathcal{L}(\mathcal{G}(\mathrm{acl}(\ulcorner X \urcorner)))$-définissable et consistant avec X.

Densité des types sans quantificateurs définissables

Soit $T_0 = \mathrm{ACVF}_{0,0}$ et $T \supseteq T_{0,\forall}$.

Theorem

Supposons:

1. $\mathrm{v}(K \cdot \mathrm{dcl}(\emptyset)^{\mathrm{alg}})$ est divisible;
2. Γ est définissablement complet dans la paire (K^{alg}, K);
3. T a un modèle maximalement complet;
4. la structure induite sur k élimine $\exists^{\infty}$;
5. la structure induite sur Γ élimine $\exists^{\infty}$.

Alors pour tout $M \models T$, x-dénombrable et $X \subseteq K^x$ strict pro-$\mathcal{L}(M)$-définissable, il existe un type $p \in \mathcal{S}_x^0(M)$ qui est $\mathcal{L}(\mathcal{G}(\mathrm{acl}(\ulcorner X \urcorner)))$-définissable et consistant avec X.

Construire des types sans quantificateurs définissables

Construire des types sans quantificateurs définissables

Soit T_0 une expansion C-minimale de ACVF et $T \supseteq T_{0,\forall}$.

Construire des types sans quantificateurs définissables

Soit T_0 une expansion C-minimale de ACVF et $T \supseteq T_{0,\forall}$.

Proposition

Alors pour tout $M \models T$, x-dénombrable et $X \subseteq K^x$ strict pro-$\mathcal{L}(M)$-définissable, il existe un type $p \in \mathcal{S}_x^0(M)$ qui est $\mathcal{L}(\mathrm{acl}(\ulcorner X \urcorner))$-définissable et consistant avec X.

Construire des types sans quantificateurs définissables

Soit T_0 une expansion C-minimale de ACVF et $T \supseteq T_{0,\forall}$.

Proposition

Supposons que:

1. les germes des fonctions de K dans k éliminent $\exists^\infty$;

Alors pour tout $M \models T$, x-dénombrable et $X \subseteq K^x$ strict pro-$\mathcal{L}(M)$-définissable, il existe un type $p \in \mathcal{S}_x^0(M)$ qui est $\mathcal{L}(\mathrm{acl}(\ulcorner X \urcorner))$-définissable et consistant avec X.

Construire des types sans quantificateurs définissables

Soit T_0 une expansion C-minimale de ACVF et $T \supseteq T_{0,\forall}$.

- Pour tout X $\mathcal{L}_0$-définissable, on dit que les germes de fonctions de K dans X éliminent $\exists^\infty$ si pour toute famille $\mathcal{L}_0$-définissable $(f_\lambda)_{\lambda\in\Lambda} : K^x \to X$, il existe une $\mathcal{L}_0$-formule $\phi(x;t)$ tel que pour tout $M \models T$ et $p \in \mathcal{S}_x^\phi(M)$ qui soit $\mathcal{L}(M)$-définissable, la structure $\mathcal{L}(M)$-induite sur $\{[f_\lambda]_p \mid \lambda \in \Lambda(M)\}$ élimine $\exists^\infty$.

Proposition

Supposons que:

1. les germes des fonctions de K dans k éliminent $\exists^\infty$;

Alors pour tout $M \models T$, x-dénombrable et $X \subseteq K^x$ strict pro-$\mathcal{L}(M)$-définissable, il existe un type $p \in \mathcal{S}_x^0(M)$ qui est $\mathcal{L}(\mathrm{acl}(\ulcorner X \urcorner))$-définissable et consistant avec X.

Construire des types sans quantificateurs définissables

Soit T_0 une expansion C-minimale de ACVF et $T \supseteq T_{0,\forall}$.

- Pour tout X $\mathcal{L}_0$-définissable, on dit que les germes de fonctions de K dans X éliminent $\exists^\infty$ si pour toute famille $\mathcal{L}_0$-définissable $(f_\lambda)_{\lambda\in\Lambda} : K^x \to X$, il existe une $\mathcal{L}_0$-formule $\phi(x;t)$ tel que pour tout $M \models T$ et $p \in \mathcal{S}_x^\phi(M)$ qui soit $\mathcal{L}(M)$-définissable, la structure $\mathcal{L}(M)$-induite sur $\{[f_\lambda]_p \mid \lambda \in \Lambda(M)\}$ élimine $\exists^\infty$.

Proposition

Supposons que:

1. les germes des fonctions de K dans k éliminent $\exists^\infty$;
2. les germes des fonctions de K dans $(K/\mathcal{O})^{[l]}$ éliminent $\exists^\infty$.

Alors pour tout $M \models T$, x-dénombrable et $X \subseteq K^x$ strict pro-$\mathcal{L}(M)$-définissable, il existe un type $p \in \mathcal{S}_x^0(M)$ qui est $\mathcal{L}(\mathrm{acl}(\ulcorner X \urcorner))$-définissable et consistant avec X.

La base canonique des types sans quantificateurs

La base canonique des types sans quantificateurs

Soit $T_0 = \mathrm{ACVF}_{0,0}$ et $T \supseteq T_{0,\forall}$.

La base canonique des types sans quantificateurs

Soit $T_0 = \mathrm{ACVF}_{0,0}$ et $T \supseteq T_{0,\forall}$.

Proposition

Alors, pour tout $M \models T$, $A = \mathrm{acl}(A) \subseteq M^{\mathrm{eq}}$ et $p \in \mathcal{S}^0_x(M)$ qui soit $\mathcal{L}(A)$-définissable, il existe $q \in \mathcal{S}^0_x(M^{\mathrm{alg}})$ qui est $\mathcal{L}(\mathcal{G}(\mathrm{acl}(\ulcorner X \urcorner)))$-définissable et qui étend p.

La base canonique des types sans quantificateurs

Soit $T_0 = \mathrm{ACVF}_{0,0}$ et $T \supseteq T_{0,\forall}$.

Proposition

Supposons que:

1. $\mathrm{v}(K \cdot \mathrm{dcl}(\emptyset)^{\mathrm{alg}})$ est divisible;
2. Γ est définissablement complet dans la paire(K^{alg}, K);
3. T a un modèle maximalement complet;

Alors, pour tout $M \models T$, $A = \mathrm{acl}(A) \subseteq M^{\mathrm{eq}}$ et $p \in \mathcal{S}^0_x(M)$ qui soit $\mathcal{L}(A)$-définissable, il existe $q \in \mathcal{S}^0_x(M^{\mathrm{alg}})$ qui est $\mathcal{L}(\mathcal{G}(\mathrm{acl}(\ulcorner X \urcorner)))$-définissable et qui étend p.

Complétion des types sans quantificateurs définissables

Complétion des types sans quantificateurs définissables

Soit $T_0 = \mathrm{ACVF}_{0,0}$, $T \supseteq \mathrm{Hen}_{0,0}$ un RV-enrichissement, $M \models T$ et $A \subseteq \mathcal{G}(M)$.

Complétion des types sans quantificateurs définissables

Soit $T_0 = \mathrm{ACVF}_{0,0}$, $T \supseteq \mathrm{Hen}_{0,0}$ un RV-enrichissement, $M \models T$ et $A \subseteq \mathcal{G}(M)$.

- On définit $D_A := \mathrm{RV} \cup \coprod_{s \in \mathrm{Lat}_n(\mathrm{dcl}_0(A))} \tau_n^{-1}(s)$.

Complétion des types sans quantificateurs définissables

Soit $T_0 = \mathrm{ACVF}_{0,0}$, $T \supseteq \mathrm{Hen}_{0,0}$ un RV-enrichissement, $M \models T$ et $A \subseteq \mathcal{G}(M)$.

- On définit $D_A := \mathrm{RV} \cup \coprod_{s \in \mathrm{Lat}_n(\mathrm{dcl}_0(A))} \tau_n^{-1}(s)$.

Theorem

Alors pour tout $p \in \mathcal{S}_{K^\kappa}(M)$, si $p|_{\mathcal{L}_0}$ est $\mathcal{L}(A)$-definable, alors p est $\mathrm{aut}(M/D_A(M))$-invariant.

Complétion des types sans quantificateurs définissables

Soit $T_0 = \mathrm{ACVF}_{0,0}$, $T \supseteq \mathrm{Hen}_{0,0}$ un RV-enrichissement, $M \models T$ et $A \subseteq \mathcal{G}(M)$.

- On définit $D_A := \mathrm{RV} \cup \coprod_{s \in \mathrm{Lat}_n(\mathrm{dcl}_0(A))} \tau_n^{-1}(s)$.

Theorem

Supposons que:

1. $\mathrm{v}(K \cdot \mathrm{dcl}(\emptyset)^{\mathrm{alg}})$ est divisible;

Alors pour tout $p \in \mathcal{S}_{K^\kappa}(M)$, si $p|_{\mathcal{L}_0}$ est $\mathcal{L}(A)$-definable, alors p est $\mathrm{aut}(M/D_A(M))$-invariant.

Élimination des imaginaires

Élimination des imaginaires

Soit $T_0 = \mathrm{ACVF}_{0,0}$ et $T \supseteq \mathrm{Hen}_{0,0}$ un RV-enrichissement.

Élimination des imaginaires

Soit $T_0 = \mathrm{ACVF}_{0,0}$ et $T \supseteq \mathrm{Hen}_{0,0}$ un RV-enrichissement.

Theorem

Alors pour tout $e \in M^{\mathrm{eq}} \models T^{\mathrm{eq}}$, on a $e \in \mathrm{dcl}(D^{\mathrm{eq}}_{\mathcal{G}(A)}(A))$ où $A = \mathrm{acl}(e)$.

Élimination des imaginaires

Soit $T_0 = \mathrm{ACVF}_{0,0}$ et $T \supseteq \mathrm{Hen}_{0,0}$ un RV-enrichissement.

Theorem

Supposons que:

1. $\mathrm{v}(K \cdot \mathrm{dcl}(\emptyset)^{\mathrm{alg}})$ est divisible;
2. Γ est définissablement complet dans la paire (K^{alg}, K);
3. La structure induite sur k élimine $\exists^\infty$;
4. La structure induite sur Γ élimine $\exists^\infty$.

Alors pour tout $e \in M^{\mathrm{eq}} \models T^{\mathrm{eq}}$, on a $e \in \mathrm{dcl}(D^{\mathrm{eq}}_{\mathcal{G}(A)}(A))$ où $A = \mathrm{acl}(e)$.

Élimination des imaginaires avec opérateurs

Élimination des imaginaires avec opérateurs

Soit $T_0 = \mathrm{ACVF}_{0,0}$, $T \supseteq \mathrm{Hen}_{0,0}$, $\mathcal{L}_1 \subseteq \mathcal{L}$ un RV-enrichissement de $\mathcal{L}_0$ et $f : K \to K^\omega$ pro-$\mathcal{L}$-définissable.

Élimination des imaginaires avec opérateurs

Soit $T_0 = \mathrm{ACVF}_{0,0}$, $T \supseteq \mathrm{Hen}_{0,0}$, $\mathcal{L}_1 \subseteq \mathcal{L}$ un RV-enrichissement de $\mathcal{L}_0$ et $f : K \to K^\omega$ pro-$\mathcal{L}$-définissable.

Theorem

Alors pour tout $e \in M^{\mathrm{eq}} \models T^{\mathrm{eq}}$, on a $e \in \mathrm{dcl}(D^{\mathrm{eq}}_{\mathcal{G}(A)}(A))$ où $A = \mathrm{acl}(e)$.

Élimination des imaginaires avec opérateurs

Soit $T_0 = \mathrm{ACVF}_{0,0}$, $T \supseteq \mathrm{Hen}_{0,0}$, $\mathcal{L}_1 \subseteq \mathcal{L}$ un RV-enrichissement de $\mathcal{L}_0$ et $f : K \to K^\omega$ pro-$\mathcal{L}$-définissable.

Theorem

Supposons que:

6. pour tout $M \preccurlyeq N \models T$ et tout uple $a \in K(N)$, $\mathrm{tp}_1(f(a)/M) \vdash \mathrm{tp}(a/M)$.

Alors pour tout $e \in M^{\mathrm{eq}} \models T^{\mathrm{eq}}$, on a $e \in \mathrm{dcl}(D^{\mathrm{eq}}_{\mathcal{G}(A)}(A))$ où $A = \mathrm{acl}(e)$.

Élimination des imaginaires avec opérateurs

Soit $T_0 = \mathrm{ACVF}_{0,0}$, $T \supseteq \mathrm{Hen}_{0,0}$, $\mathcal{L}_1 \subseteq \mathcal{L}$ un RV-enrichissement de $\mathcal{L}_0$ et $f : K \to K^\omega$ pro-$\mathcal{L}$-définissable.

Theorem

Supposons que:

1. $\mathrm{v}(K \cdot \mathrm{dcl}(\emptyset)^{\mathrm{alg}})$ est divisible;
2. Γ est définissablement complet dans la paire (K^{alg}, K);
3. T a un modèle maximalement complet;
4. la structure induite sur k élimine $\exists^\infty$;
5. la structure induite sur Γ élimine $\exists^\infty$;
6. pour tout $M \preccurlyeq N \models T$ et tout uple $a \in K(N)$, $\mathrm{tp}_1(f(a)/M) \vdash \mathrm{tp}(a/M)$.

Alors pour tout $e \in M^{\mathrm{eq}} \models T^{\mathrm{eq}}$, on a $e \in \mathrm{dcl}(D^{\mathrm{eq}}_{\mathcal{G}(A)}(A))$ où $A = \mathrm{acl}(e)$.