Éliminations dans les corps valués

Silvain Rideau

Université Paris-Sud, École Normale Supérieure

9 décembre 2014

Les corps valués...

Ce sont essentiellement des corps munis d'une norme ultramétrique.

Définition

Un corps valué est un corps K muni d'un morphisme de groupe $\mathrm{v} : K^{\star} \to \Gamma$ vers un groupe abélien ordonné telle que pour tout $x, y \in K$:

$$\mathrm{v}(x + y) \geq \min\{\mathrm{v}(x), \mathrm{v}(y)\}.$$

Exemple

- Les séries de Laurent $k((t))$ sur un corps k ;
- Plus généralement, les corps de Hahn $k((t^{\Gamma}))$;
- Le corps $\mathbb{Q}_p$ des nombres p-adiques ;
- Plus généralement, les vecteurs de Witt $\mathrm{W}(k)$ sur un corps parfait k de caractéristique positive.

… et la théorie des modèles

Théorème (Ax-Kochen-Eršov, 1965)

Soient K et L deux corps valués Henséliens d'équicaractéristique nulle. Ils sont élémentairement équivalents si et seulement si leurs groupes de valeurs et leurs corps résiduels le sont.

Définition (Corps valué Hensélien)

Soit (K, v) un corps valué. On dit qu'il est Hensélien si pour tout $P \in \mathcal{O}[X]$ et $a \in \mathcal{O}$ tel que $\mathrm{v}(P(a)) > 2\,\mathrm{v}(P'(a))$ il existe $b \in \mathcal{O}$ tel que $P(b) = 0$ et $\mathrm{v}(a - b) > \mathrm{v}(P(a)) - \mathrm{v}(P'(a))$.

Plan de l'exposé

- Élimination des quantificateurs
  Les corps valués
  Les corps valués avec structure analytique
  Les corps valués de différence
  Les corps valués analytiques de différence (Chapitre 2)

- Élimination des imaginaires
  Les corps *p*-adiques (Chapitre 1)
  Les corps valués différentiels (Chapitre 3 et 4)

Élimination des quantificateurs

Élimination des quantificateurs

Définition

On dit qu'une $\mathcal{L}$-théorie T élimine les quantificateurs si pour toute $\mathcal{L}$-formule $\phi(\overline{x})$, il existe une formule $\psi(\overline{x})$ sans quantificateurs telle que :

$$T \vdash \forall \overline{x} \left(\phi(\overline{x}) \iff \psi(\overline{x}) \right).$$

Parmi les ensembles définissables dans une structure il faut distinguer :

- Les ensembles définissables de base ;
- Les combinaisons booléennes d'ensembles de base ;
- Les projections et combinaisons booléennes d'ensembles de base.

Autrement dit dans une théorie qui élimine les quantificateurs, la classe des combinaisons booléennes d'ensembles de base est close par projection.

Les quantificateurs dans les corps valués

Théorème (A. Robinson, 1977)

La théorie des corps valués algébriquement clos élimine les quantificateurs dans le langage des anneaux enrichi d'un prédicat pour $\mathrm{v}(x) \leq \mathrm{v}(y)$.

Théorème (Macintyre, 1976)

La théorie de $\mathbb{Q}_p$ élimine les quantificateurs dans le langage des anneaux enrichi d'une part d'un prédicat pour $\mathrm{v}(x) \leq \mathrm{v}(y)$ et d'autre part, pour tout $n \in \mathbb{N}_{>0}$, d'un prédicat pour l'ensemble des puissances n-ièmes.

Les quantificateurs de corps dans les corps Henséliens

On note $\mathbf{RV} = K^\star/(1+\mathfrak{M})$. On a alors une suite exacte courte :

$$1 \to k^\star \to \mathbf{RV} \to \Gamma \to 0.$$

Théorème (Basarab-Kuhlmann, 1992)

La théorie des corps valués Henséliens d'équicaractéristique nulle élimine les quantificateurs de corps dans le langage avec RV.

On note $\mathbf{RV}_n := K^\star/(1+n\,\mathfrak{M})$ et $\mathbf{R}_n := \mathcal{O}/n\,\mathfrak{M}$. On a alors une suite exacte courte :

$$1 \to \mathbf{R}_n^\star \to \mathbf{RV}_n \to \Gamma \to 0.$$

Théorème (Basarab-Kuhlmann, 1992)

La théorie des corps valués Henséliens de caractéristique nulle élimine les quantificateurs de corps dans le langage avec les RV_n.

Un enrichissement : Les fonctions analytiques

- Soit (K, v) un corps valué complet. Toute série formelle à coefficients dans K induit une fonction $D \to K$ où D est son domaine de convergence.
- On note $\mathcal{O}\langle X \rangle = \{\sum a_i X^i \mid a_i \in \mathcal{O} \text{ et } \lim_{i\to\infty} a_i = 0\}$.
- Toute série $f \in \mathcal{O}\langle \overline{X} \rangle[[\overline{Y}]]$ induit une fonction $\mathcal{O}^m \times \mathfrak{M}^n \to \mathcal{O}$ où $m = |\overline{X}|$ et $n = |\overline{Y}|$.

Les corps valués avec structure analytique

Soit A un anneau noethérien et $I \subseteq A$ un idéal tel que A soit séparé et complet dans sa topologie I-adique.

Définition (Structure A-analytique)

Une structure A-analytique sur un corps valué (K, v) est la donnée pour tout m et $n \in \mathbb{N}$ d'un morphisme d'anneau
$i_{m,n} : \mathcal{A}_{m,n} := A\langle\overline{X}\rangle[[\overline{Y}]] \to \mathcal{O}^{\mathcal{O}^m \times \mathfrak{M}^n}$ où $|\overline{X}| = n$ et $|\overline{Y}| = m$ qui vérifient certaines propriétés :

- $i_{0,0}(I) \subseteq \mathfrak{M}$;
- $i_{m,n}(X_i) : \mathcal{O}^m \times \mathfrak{M}^n \to \mathcal{O}$ est la i-ième projection ;
- $i_{m,n}(Y_j) : \mathcal{O}^m \times \mathfrak{M}^n \to \mathcal{O}$ est la $(m+j)$-ième projection ;
- Les $i_{m,n}$ sont compatibles avec les inclusions $\mathcal{A}_{m,n} \subseteq \mathcal{A}_{m+k,n+l}$.

Les corps valués avec structure analytique

Soit A un anneau noethérien et $I \subseteq A$ un idéal tel que A soit séparé et complet dans sa topologie I-adique.

Définition (Structure A-analytique)

Une structure A-analytique sur un corps valué (K, v) est la donnée pour tout m et $n \in \mathbb{N}$ d'un morphisme d'anneau $i_{m,n} : \mathcal{A}_{m,n} := A\langle\overline{X}\rangle[[\overline{Y}]] \to \mathcal{O}^{\mathcal{O}^m \times \mathfrak{M}^n}$ où $|\overline{X}| = n$ et $|\overline{Y}| = m$ qui vérifient certaines propriétés (raisonnables).

Exemple

- Tout corps valué complet (K, v) peut être muni d'une structure $\mathcal{O}$-analytique naturelle.
- Plus généralement, tout morphisme d'anneau $f : A \to \mathcal{O}$ tel que $f(I) \subseteq \mathfrak{M}$ donne lieu à une structure A-analytique sur K.

Les corps valués avec structure analytique

Soit A un anneau noethérien et $I \subseteq A$ un idéal tel que A soit séparé et complet dans sa topologie I-adique.

Définition (Structure A-analytique)

Une structure A-analytique sur un corps valué (K, v) est la donnée pour tout m et $n \in \mathbb{N}$ d'un morphisme d'anneau $i_{m,n} : \mathcal{A}_{m,n} := A\langle \overline{X} \rangle[[\overline{Y}]] \to \mathcal{O}^{\mathcal{O}^m \times \mathfrak{M}^n}$ où $|\overline{X}| = n$ et $|\overline{Y}| = m$ qui vérifient certaines propriétés

Théorème (Cluckers-Lipshitz-Robinson)

La théorie des corps Henséliens de caractéristique nulle muni d'une structure A-analytique élimine les quantificateurs de corps dans le langage avec les RV_n.

Un autre enrichissement : Un automorphisme

Définition (Corps valué de différence σ-Henselien)

Soit (K, v, σ) un corps valué de différence. Il est σ-Hensélien si pour tout polynôme $P \in \mathcal{O}[X_0, \ldots, X_n]$, et $a \in \mathcal{O}$, si

$$\mathrm{v}(P(a, \ldots, \sigma^n(a))) > 2 \min_i \left\{ \mathrm{v}\left(\frac{\partial P}{\partial X_i}(a, \ldots, \sigma^n(a)) \right) \right\},$$

alors il existe $b \in \mathcal{O}$ tel que $P(b, \ldots, \sigma^n(b)) = 0$ et

$$\mathrm{v}(a - b) > \mathrm{v}(P(a), \ldots, \sigma^n(a)) - \min_i \left\{ \mathrm{v}\left(\frac{\partial P}{\partial X_i}(a, \ldots, \sigma^n(a)) \right) \right\}.$$

Définition (Corps de différence linéairement clos)

Soit (k, σ) un corps de différence, on dit qu'il est linéairement clos si pour tout $L(X_0, \ldots, X_n) = \sum_i a_i X_i$ et $a \in k$ il existe b tel que $L(b, \ldots, \sigma^n(b)) = a$.

Corps valué de différence

Exemple

- Le relèvement du Frobenius sur $W(k)$;
- L'ultraproduit des $\overline{\mathbb{F}_p}^{\mathrm{alg}}((t))$ munis du Frobenius.

Théorème (Durhan-Onay)

La théorie des corps valués de différence de caractéristique nulle qui sont σ-Henséliens et dont le corps résiduel est linéairement clos éliminent les quantificateurs de corps dans le langage avec les RV_n.

Corps valués analytiques de différence

Théorème D (Chapitre 2)

La théorie des corps valués de différence avec une structure analytique, qui sont σ-Henséliens et dont le corps résiduel est linéairement clos éliminent les quantificateurs de corps dans le langage avec les RV_n.

Remarque

Dans ce cas là la notion de σ-Henselianité doit être généralisée.

Une petite digression : Modération des théories

- Savoir qu'une théorie élimine les quantificateurs peut permettre de prouver des résultats de modération.

Définition (Propriété d'indépendance)

Une formule $\phi(x,y)$ a la propriété d'indépendance dans une structure M s'il existe $(a_i)_{i\in\mathbb{N}}$ et $(b_j)_{j\in\mathcal{P}(\mathbb{N})}$ dans M tels que :

$$M \vDash \phi(a_i, b_j) \iff i \in j.$$

Une théorie est NIP (not the independence property) si aucune formule n'a la propriété d'indépendance dans aucun modèle de T.

- On peut montrer en utilisant le théorème D que la théorie de $\mathrm{W}(\overline{\mathbb{F}_p}^{\mathrm{alg}})$ en tant que corps valué analytique de différence est NIP.

Élimination des imaginaires

Élimination des imaginaires

Définition

On dit qu'une $\mathcal{L}$-théorie T élimine les imaginaires si pour toute relation d'équivalence $E \subseteq D^2$ $\varnothing$-définissable, il existe une fonction définissable f de domaine D telle que pour tout x et $y \in D$:

$$xEy \iff f(x) = f(y).$$

On a alors $D/E \simeq \mathrm{Im}(f)$.

Théorème (Poizat, 1983)

Les corps algébriquement clos éliminent les imaginaires.

Les imaginaires dans les corps valués

Définition (Les sortes géométriques)

Soit (K, v) un corps valué.

- Pour tout $n \in \mathbb{N}_{>0}$, on note, $\mathbf{S}_n$ l'ensemble des sous-$\mathcal{O}$-modules libres de rang n de K^n.
- Pour tout $n \in \mathbb{N}_{>0}$, on note $\mathbf{T}_n := \bigcup_{s \in \mathbf{S}_n} s/\mathfrak{M}s = \{a + \mathfrak{M}s \mid s \in \mathbf{S}_n \text{ et } a \in s\}$.

On a $\mathbf{S}_n \simeq \mathrm{GL}_n(K)/\mathrm{GL}_n(\mathcal{O})$ et $\mathbf{T}_n \simeq \mathrm{GL}_n(K)/\mathrm{GL}_{n,n}(\mathcal{O})$.

Théorème (Haskell-Hrushovski-Macpherson, 2006)

La théorie des corps valués algébriquement clos dans le langage géométrique élimine les imaginaires.

Et qu'en est-il des corps p-adiques ?

Théorème A (Hrushovski-Martin-R., Chapitre 1)

Soit L_p une extension finie de $\mathbb{Q}_p$. La théorie de L_p dans le langage géométrique élimine les imaginaires si on rajoute une constante bien choisie.

Théorème B (Hrushovski-Martin-R., Chapitre 1)

La théorie des ultraproduits non principaux $\prod_p \mathbb{Q}_p \,/\, \mathfrak{U}$ dans le langage géométrique élimine les imaginaires si on rajoute une infinité (dénombrable) de constantes bien choisies.

Corps valués différentiels

Tous les corps valués différentiels $(K, \mathrm{v}, \partial)$ que l'on considère sont tels que pour tout $x \in K$, $\mathrm{v}(\partial(x)) \geq \mathrm{v}(x)$.

Définition (Corps valué de différence ∂-Henselien)

Soit $(K, \mathrm{v}, \partial)$ un corps valué différentiel. Il est ∂-Hensélien si pour tout polynôme $P \in \mathcal{O}[X_0, \ldots, X_n]$, et $a \in \mathcal{O}$, si

$$\mathrm{v}(P(a, \ldots, \partial^n(a))) > 2 \min_i \left\{ \mathrm{v}\left(\frac{\partial P}{\partial X_i}(a, \ldots, \partial^n(a)) \right) \right\},$$

alors il existe $b \in \mathcal{O}$ tel que $P(b, \ldots, \partial^n(b)) = 0$ et

$$\mathrm{v}(a - b) > \mathrm{v}(P(a), \ldots, \partial^n(a)) - \min_i \left\{ \mathrm{v}\left(\frac{\partial P}{\partial X_i}(a, \ldots, \partial^n(a)) \right) \right\}.$$

Définition

On dit qu'un corps valué différentiel $(K, \mathrm{v}, \partial)$ a assez de constantes si pour tout $x \in K$ il existe $y \in K$ tel que $\partial(y) = 0$ et $\mathrm{v}(x) = \mathrm{v}(y)$.

La théorie VDF

Définition

On note VDF la théorie des corps valués différentiels ∂-Henséliens d'équicaractéristique nulle dont le groupe de valeur est divisible et le corps résiduel est différentiellement clos.

Théorème (Scanlon, 2000)

La théorie VDF élimine les quantificateurs dans le langage des anneaux enrichis d'un prédicat pour $\mathrm{v}(x) \leq \mathrm{v}(y)$ et un symbole pour la dérivation ∂. De plus c'est la modèle complétion de la théorie des corps valués différentiels (dont la dérivée préserve la valuation).

De nouveaux résultats

Théorème F (Chapitre 4)

La théorie VDF élimine les imaginaires dans le langage géométrique enrichi d'un symbole pour la dérivation ∂ et a la propriété d'extension invariante.

Cela provient essentiellement d'un résultat de densité des types définissables à base canonique géométrique.

Théorème E (Chapitre 3)

- Soit $M \models \mathrm{VDF}$ et $A \subseteq M^{\mathrm{eq}}$ algébriquement clos et X définissable au dessus de A. Alors, il existe un type p définissable sur A consistant avec X ;
- Soit p un type définissable sur A, il est alors définissable sur $\mathcal{G}(A)$.

Un peu de NIP

Proposition (R.-Simon, Chapitre 3)

Soit X un ensemble définissable par une VDF-formule. Si X est extérieurement définissable par une ACVF-formule alors il est aussi définissable par une ACVF-formule.

Corollaire

Soit p un ACVF-type qui un un schéma de définition dans VDF. Il a alors aussi un schéma de définition dans ACVF.

RIDEAU

E. Ionesco, *Rhinocéros*, Acte III.