Examen

Logique

18 janvier 2023

Vous pouvez toujours utiliser une question précédente pour faire les questions suivantes, même si vous n'y avez pas répondu.

La qualité de la rédaction sera prise en compte dans la notation. Il est possible que le sujet soit trop long pour être terminé dans le temps imparti. Le cas échéant, la notation en tiendra compte.

Exercice 1. On travaille dans ZFC et on suppose (HGC): pour tout cardinal infini κ, $2^\kappa = \kappa^+$. On fixe un cardinal infini κ et un cardinal λ non nul. Montrer que:

$$\kappa^\lambda = \begin{cases} \kappa & \text{si } \lambda < \operatorname{cof}(\kappa) \\ \kappa^+ & \text{si } \operatorname{cof}(\kappa) \leqslant \lambda \leqslant \kappa \\ \lambda^+ & \text{si } \kappa \leqslant \lambda. \end{cases}$$

Si $\lambda > \kappa$, $\lambda^+ = 2^\lambda \leqslant \kappa^\lambda \leqslant \lambda^\lambda = \lambda^+$. Si $\operatorname{cof}(\kappa) \leqslant \lambda \leqslant \kappa$, $\kappa < \kappa^{\operatorname{cof}\kappa} \leqslant \kappa^\lambda \leqslant \kappa^\kappa = \kappa^+$ et donc $\kappa^\lambda = \kappa^+$. Enfin, si $\lambda < \operatorname{cof}(\kappa)$, alors toute fonction $f : \lambda \to \kappa$ est d'image bornée et donc $\kappa^\lambda = |\bigcup_{\alpha<\kappa} \alpha^\lambda| \leqslant \kappa \sup_{\mu<\kappa} \mu^\lambda \leqslant \kappa$, puisque $\mu^\lambda \leqslant 2^{\mu\lambda} \leqslant (\mu\lambda)^+ \leqslant \kappa$.

Exercice 2. Si X et Y sont des ensembles ordonnés, on note $X+Y$ l'union disjointe ordonnée de gauche à droite et $X \times_{\text{lex}} Y$ le produit ordonné lexicographique (de gauche à droite): $(x_1, y_1) < (x_2, y_2)$ si $x_1 < x_2$ ou $x_1 = x_2$ et $y_1 < y_2$.

1. Soit $\mathcal{M}$ un modèle non-standard de PA. Montrer que $(M, <)$ est isomorphe à $\mathbb{N} + (I \times_{\text{lex}} \mathbb{Z})$, où $(I, <)$ est un ordre linéaire dense sans extrémités (non vide).
2. Soit $\mathcal{M}$ un modèle *dénombrable* non-standard de PA. Montrer que $(M, <)$ est isomorphe à $\mathbb{N} + (\mathbb{Q} \times_{\text{lex}} \mathbb{Z})$.
3. Montrer qu'il n'existe pas de modèle $\mathcal{M}$ de PA tel que $(\mathcal{M}, <)$ soit isomorphe à $\mathbb{N}+(\mathbb{R}\times_{\text{lex}} \mathbb{Z})$.
   [On pourra, par exemple, montrer que pour tout modèle $\mathcal{M}$ de PA, pour tout entier non-standard $a \in M$, pour tous entiers standard n, m, on a $a^2 > n \cdot a + m$, et considérer la famille $(n \cdot a)_{n\in\mathbb{N}}$]

Exercice 3. Soit T la théorie de $(\mathbb{N}, 0, 1, +, -, \times, <)$, dans le langage $\mathcal{L} = \{0, 1, +, -, \times, <\}$. L'objectif de cet exercice est de compter les extensions élémentaires dénombrables de $(\mathbb{N}, 0, 1, +, -, \times, <)$, à isomorphisme près.

1. Montrer que tout modèle de T est automatiquement une extension élémentaire de la structure $(\mathbb{N}, 0, 1, +, -, \times, <)$.
2. On suppose qu'il existe un uplet fini de variables $\overline{x}$ et une famille $(\varphi_k(\overline{x}))_{k\in\omega}$ de $\mathcal{L}$-formules ayant la propriété suivante :
   $(*)$: Pour toute fonction $f : \omega \to 2$, la collection de formules $\{\varphi_k(\overline{x})^{f(k)} \mid k < \omega\} \cup T$ est consistante.
   Ici, on note $\varphi_k(\overline{x})^{f(k)}$ la formule $\varphi_k(\overline{x})$ si $f(k) = 0$, et la formule $\neg\varphi_k(\overline{x})$ si $f(k) = 1$.
   Sous cette hypothèse, compter les modèles dénombrables de T à isomorphisme près.
3. Compter les extensions élémentaires dénombrables de $(\mathbb{N}, 0, 1, +, -, \times, <)$ à isomorphisme près.
   [On pourra utiliser les questions précédentes.]

Exercice 4. Soient α et β des ordinaux. On considère les ordinaux comme des structures dans le langage avec un symbole binaire $\{<\}$ pour l'ordre.

1. Montrer qu'il existe une formule $\varphi(x)$ telle que pour tout $\gamma \in \alpha$, on a $\alpha \models \varphi(\gamma)$ si et seulement si γ est limite.
2. Montrer que, si $\alpha < \beta < \omega^\omega 2$, alors α et β ne sont pas élémentairement équivalents.
   [On pourra commencer par traiter le cas où $\alpha < \beta < \omega^\omega$.]
3. Montrer que si $\alpha < \omega^\omega$ et $\alpha \equiv \beta$, alors $\alpha = \beta$.
4. Montrer que la théorie de $(\omega, 0, <, s)$ élimine les quantificateurs, où $s(n) = n + 1$.
5. Montrer que la théorie de $(\omega^2, 0, <, s, L, s_L)$ élimine les quantificateurs, où $s(n) = n + 1$, L est l'ensemble des ordinaux limites et $s_L(\alpha)$ est le plus petit ordinal limite $\lambda > \alpha$.
6. Supposons $\alpha \geqslant \omega^\omega$ et ρ le reste de la division de α par ω^ω. Montrer que $\alpha \equiv \omega^\omega + \rho$.
   [Vous pourrez supposer connu que pour tout β, $\omega^\omega\beta \equiv \omega^\omega$.]