Correction du Partiel

Logique

9 novembre 2022

Exercice 1. Soient $f : \mathcal{M}_1 \to \mathcal{M}_2$ et $g : \mathcal{M}_2 \to \mathcal{M}_3$ des plongements entre $\mathcal{L}$-structures.

1. Montrer que si f et g sont élémentaires, alors $g \circ f$ l'est aussi.

   Soient $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ une formule et $a_1, \ldots a_n \in M_1$ tels que $\mathcal{M}_1 \models \varphi(a_1, \ldots, a_n)$. Comme f est élémentaire, on a $\mathcal{M}_2 \models \varphi(f(a_1), \ldots, f(a_n))$, et comme g est élémentaire, on a $\mathcal{M}_3 \models \varphi(g(f(a_1)), \ldots, g(f(a_n)))$. La réciproque suit de même, ou en considérant $\neg\varphi$.

2. Montrer que si $g \circ f$ et g sont élémentaires, alors f l'est aussi.

   Soient $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ une formule et $a_1, \ldots a_n \in M_1$ tels que $\mathcal{M}_1 \models \varphi(a_1, \ldots, a_n)$. Comme $g \circ f$ est élémentaire, on a $\mathcal{M}_3 \models \varphi(g(f(a_1)), \ldots, g(f(a_n)))$, et comme g est élémentaire, $\mathcal{M}_2 \models \varphi(f(a_1)), \ldots, f(a_n)))$. La réciproque suit de même, ou en considérant $\neg\varphi$.

Exercice 2. Soit $(A, \leqslant)$ une algèbre de Boole. Une mesure (finiment additive) sur A est une fonction $\mu : A \to [0, 1]$ telle que:

- $\mu(\top) = 1$
- Si a et $b \in A$ sont tels que $a \wedge b = \bot$, alors $\mu(a \vee b) = \mu(a) + \mu(b)$.

La notion de mesure finiment additive est également définie pour les anneaux de Boole, via la corrrespondance habituelle[1]. *On pourra, au choix, faire l'exercice avec le formalisme des anneaux de Boole ou celui des algèbres de Boole.*

Soit μ une mesure sur A.

1. Montrer que $\mu^{-1}(\{1\})$ est un filtre.

   Pour tout $a, b \in A$, montrons que $\mu(a \vee b) + \mu(a \wedge b) = \mu(a) + \mu(b)$. En effet, $a \vee b = a \vee (b \wedge \neg a)$ et $a \wedge (b \wedge \neg a) = b \wedge \bot = \bot$. On a donc $\mu(a \vee b) = \mu(a) + \mu(b \wedge \neg a)$. De plus $b = (b \wedge a) \vee (b \wedge \neg a)$ et $(b \wedge a) \wedge (b \wedge \neg a) = b \wedge \bot = \bot$ et donc $\mu(b) = \mu(a \wedge b) + \mu(b \wedge \neg a)$. Il s'ensuit que $\mu(a \vee b) = \mu(a) + \mu(b) - \mu(a \wedge b)$.

   Montrons maintenant que $X = \mu^{-1}(\{1\})$ est un filtre. Par définition $\top \in X$. On a aussi $\mu(\bot) = \mu(\bot \vee \bot) = 2\mu(\bot)$ puisque $\bot \wedge \bot = \bot$ et donc $\mu(\bot) = 0$; d'où $\bot \notin X$. De plus, si $a \leqslant b$ et $\mu(a) = 1$, on a $\mu(b) = \mu(a \vee (b \wedge \neg a)) \geqslant \mu(a) = 1$ et donc $\mu(b) = 1$. Enfin, si $\mu(a) = \mu(b) = 1$, on a $\mu(a \vee b) = 1 = \mu(a) + \mu(b) - \mu(a \wedge b) = 2 - \mu(a \wedge b)$ et donc $\mu(a \wedge b) = 1$.

2. Montrer que $\mu^{-1}(\{1\})$ est un ultrafiltre si et seulement si $\mu(A) = \{0, 1\}$.

   Pour tout $a \in A$, on a $1 = \mu(\bot) = \mu(a) + \mu(\neg a)$ et donc $\mu(\neg a) = 1 - \mu(a)$.

   Supposons que $F = \mu^{-1}(\{1\})$ est un ultrafiltre. Pour tout $a \in A$, on a donc $\mu(a) = 1$ ou $\mu(\neg a) = 1$. Mais dans ce dernier cas, on a alors $\mu(a) = 1 - \mu(\neg a) = 0$. Réciproquement, si $\mu(A) = \{0, 1\}$, si $\neg a \notin F$, $\mu(\neg a) = 0$ et donc $\mu(a) = 1 - \mu(\neg a) = 1$; d'où $a \in F$ qui est donc bien un ultrafiltre.

Exercice 3. Soient I un ensemble non vide et $(a_i)_{i\in I}$ et $(b_i)_{i\in I}$ des familles de réels. Dans cet exercice, on considère $\mathbb{R}$ comme une structure dans le langage avec un unique symbole binaire $<$ interprété comme l'ordre usuel.

1. On suppose que $[0, 1] \subseteq \bigcup\limits_{i\in I}]a_i, b_i[$. Montrer que cela reste vrai dans toute extension élémentaire de $\mathbb{R}$, i.e. que, pour toute extension élémentaire $\mathcal{R}$ de $\mathbb{R}$, pour tout $a \in \mathcal{R}$, si on a $\mathcal{R} \vDash (0 \leqslant a) \wedge (a \leqslant 1)$, alors il existe $i \in I$ tel que $\mathcal{R} \vDash (a_i < a) \wedge (a < b_i)$.

   [On pourra commencer par considérer le cas où I est fini.]

   Par compacité de $[0, 1]$ pour la topologie usuelle sur $\mathbb{R}$, on peut extraire un recouvrement fini du recouvrement $\bigcup_i]a_i, b_i[$. Il existe donc I_0 fini tel que $[0, 1] \subseteq \bigcup_{i\in I_0}]a_i, b_i[$. En d'autres termes, $\mathbb{R} \vDash \forall x\, (0 \leqslant x \wedge x \leqslant 1) \to \bigvee_{i\in I_0} a_i < x \wedge x < b_i$. Cet énoncé reste vrai dans toute extension élémentaire $\mathcal{R}$ et donc, pour tout $x \in \mathcal{R}$, il existe un $i \in I_0$ tel que $\mathcal{R} \vDash a_i < x \wedge x < b_i$.

2. ($\star$) On suppose maintenant $]0, 1[\subseteq \bigcup\limits_{i\in I}]a_i, b_i[$. Donner une condition nécessaire et suffisante, sur les familles $(a_i)_{i\in I}$ et $(b_i)_{i\in I}$, pour que cette inclusion reste vraie dans toute extension élémentaire de $\mathbb{R}$.

   S'il existe un sous-recouvrement fini, c'est-à-dire $I_0 \subseteq I$ fini tel que $]0, 1[\subseteq \bigcup_{i\in I_0}]a_i, b_i[$, on a alors $\mathbb{R} \vDash \forall x\, (0 < x \wedge x < 1) \to \bigvee_{i\in I_0} a_i < x \wedge x < b_i$ et donc cet énoncé reste vrai dans toute extension élémentaire $\mathcal{R}$ de $\mathbb{R}$. Comme précédemment, il s'ensuit que, dans $\mathcal{R}$, $]0, 1[\subseteq \bigcup_{i\in I_0}]a_i, b_i[\subseteq \bigcup_i]a_i, b_i[$.

   Réciproquement, s'il n'existe pas de sous-recouvrement fini, alors pour tout $I_0 \subseteq I$ fini, dans $\mathbb{R}$, $]0, 1[\smallsetminus \bigcup_{i\in I_0}]a_i, b_i[\neq \varnothing$. L'ensemble de formules $\mathcal{D}(\mathbb{R}) \cup \{0 < x \wedge x < 1\} \wedge \{x \leqslant a_i \vee b_i \leqslant x\}$ est donc finiment consistant (dans $\mathbb{R}$). Par compacité, il est consistant et il existe $a \in \mathcal{R} \succcurlyeq \mathbb{R}$ tel que $\mathcal{R} \vDash 0 < a < 1$ et pour tout $i \in I$, $\mathcal{R} \vDash a \leqslant a_i \vee b_i \leqslant a$.

   Une condition équivalente est : il existe $i, j \in I$ tels que $a_i \leqslant 0 < b_i$ et $a_j < 1 \leqslant b_j$. En effet, supposons que cette condition est vérifiée. Alors, on a $[b_i, a_j] \subseteq]0, 1[\subseteq \bigcup\limits_{k\in I}]a_k, b_k[$. Donc, par compacité, on peut extraire un sous-recouvrement fini de $[b_i, a_j]$. Alors, en ajoutant $]a_i, b_i[$ et $]a_j, b_j[$ à ce recouvrement, on a un recouvrement fini de $]0, 1[$.

   Réciproquement, supposons que, pour tout $i \in I$, on ait $a_i > 0$ ou $b_i \leqslant 0$, l'autre cas (pour tout $j \in I$, $a_j \geqslant 1$ ou $b_j < 1$) étant similaire. On constate que, si $b_i \leqslant 0$, alors $]a_i, b_i[\cap]0, 1[= \varnothing$, donc on peut supposer que, pour tout $i \in I$, on a $a_i > 0$. Alors, on ne peut pas extraire de sous-recouvrement fini.

---

[1]On rappelle que, dans un anneau de Boole, on a $\top = 1$, $\bot = 0$, $a \wedge b = a \cdot b$ et $a \vee b = a + b + a \cdot b$.

Exercice 4. Soit $\mathcal{L}$ le langage avec un unique symbole f de fonction unaire.

1. Écrire une théorie T dans le langage $\mathcal{L}$ dont les modèles sont exactement les structures (non vides) dans lesquelles f est une bijection telle qu'aucune composée f^n n'a de point fixe, pour $n \geqslant 1$.

   La théorie T contient:

   - $\forall x \forall y\, f(x) = f(y) \to x = y$;
   - $\forall x \exists y\, f(y) = x$;
   - pour tout n, $\forall x\, \neg f \dots f x = x$ où il y a n symboles f à gauche de l'égalité.

2. Montrer que deux modèles de T non-dénombrables de même cardinal sont isomorphes.

   Soit $\mathcal{M} \models T$. On dit que $x, y \in M$ sont dans la même f-orbite, s'il existe un entier n tel que $f^n(x) = y$. C'est une relation d'équivalence dont les classes sont dénombrables (elles sont naturellement en bijection avec $\mathbb{Z}$) — en particulier, M est infini. Pour toute f-orbite X, on choisit $x_X \in X$ (par l'axiome du choix). Soit Z un ensemble de même cardinal que l'ensemble Y des f-orbites de M, et $h : Z \to Y$ une bijection. On définit alors $g : Z \times \mathbb{Z} \to M$ par $g(z, n) = f^n(x_{h(z)})$. Cette fonction est injective. En effet, si $f^n(x_{h(z)}) = f^m(x_{h(y)})$, alors $x_{h(z)}$ et $x_{h(y)}$ sont dans la même orbite et donc $z = y$. On a alors $f^n(x_{h(x)}) = f^m(x_{h(x)})$ et donc $n = m$ puisque sinon f^{m-n} n'a pas de point fixe. Elle est aussi surjective puisque, par définition, tout élément de M est de la forme $f^n(x_X)$ où X est sa f-orbite.

   Si on interprète f sur $Y \times \mathbb{Z}$ par $f(X, n) = (X, n+1)$, la fonction g est un isomorphisme. De plus, si M est non-dénombrable, alors Y est de même cardinal que M. En effet, on vient de voir que M est de même cardinal que $Y \times \mathbb{Z}$. Si Y ne peut pas être fini puisque $Y \times \mathbb{Z}$ serait alors dénombrable. Il s'ensuit que Y est de même cardinal que M.

   Soit $\mathcal{N} \models T$ de même cardinal que $\mathcal{M}$ et Z l'ensemble de ses f-orbites. On a vu que Z est de même cardinal que N et donc que Y. On a alors que $\mathcal{M}$ et $\mathcal{N}$ sont tous deux isomorphes à $Y \times \mathbb{Z}$ par la construction ci-dessus.

3. ($\star$) Soit $f : \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ un plongement entre modèles de T. Montrer qu'il est élémentaire.

   [On pourra commencer par considérer le cas où le cardinal de N est strictement plus grand que celui de M.]

   Par Lowenheim-Skolem, soient $h : \mathcal{M} \to \mathcal{M}^\star$ et $l : \mathcal{N} \to \mathcal{N}^\star$, avec $\mathcal{M}^\star$ et $\mathcal{N}^\star$ de même cardinal strictement plus grand que celui de $\mathcal{M}$. On remarque que $\mathcal{M}^\star \setminus h(\mathcal{M})$ est encore une $\mathcal{L}$-structure et que c'est un modèle de T de même cardinal que $\mathcal{M}^\star$ — en particulier non dénombrable. De même pour $\mathcal{N}^\star \setminus l(g(\mathcal{M}))$. Ils sont donc isomorphes par la questions précédente. Quitte à l'étendre par $l \circ g$, on trouve un isomorphisme $i : \mathcal{M}^\star \to \mathcal{N}^\star$ tel que $l \circ g = i \circ h$. Par la question 1.1, $i \circ h$ est élémentaire. C'est donc aussi le cas de g par la question 1.2.