Partiel

Logique

9 novembre 2022

La qualité de la rédaction sera prise en compte dans la notation.

Vous pouvez toujours utiliser une question précédente pour faire les questions suivantes, même si vous n'y avez pas répondu. Les questions avec une $(\star)$ sont censées être plus difficiles.

On rappelle que pour tout ensemble infini X, $X \times \mathbb{Z}$ est de même cardinal que X.

Exercice 1. Soient $f : \mathcal{M}_1 \to \mathcal{M}_2$ et $g : \mathcal{M}_2 \to \mathcal{M}_3$ des plongements entre $\mathcal{L}$-structures.

1. Montrer que si f et g sont élémentaires, alors $g \circ f$ l'est aussi.
2. Montrer que si $g \circ f$ et g sont élémentaires, alors f l'est aussi.

Exercice 2. Soit $(A, \leqslant)$ une algèbre de Boole. Une mesure (finiment additive) sur A est une fonction $\mu : A \to [0,1]$ telle que:

- $\mu(\top) = 1$
- Si a et $b \in A$ sont tels que $a \wedge b = \bot$, alors $\mu(a \vee b) = \mu(a) + \mu(b)$.

La notion de mesure finiment additive est également définie pour les anneaux de Boole, via la corrrespondance habituelle[1]. *On pourra, au choix, faire l'exercice avec le formalisme des anneaux de Boole ou celui des algèbres de Boole.*

Soit μ une mesure sur A.

1. Montrer que $\mu^{-1}(\{1\})$ est un filtre.
2. Montrer que $\mu^{-1}(\{1\})$ est un ultrafiltre si et seulement si $\mu(A) = \{0,1\}$.

Exercice 3. Soient I un ensemble non vide et $(a_i)_{i\in I}$ et $(b_i)_{i\in I}$ des familles de réels. Dans cet exercice, on considère $\mathbb{R}$ comme une structure dans le langage avec un unique symbole binaire $<$ interprété comme l'ordre usuel.

1. On suppose que $[0,1] \subseteq \bigcup_{i\in I}]a_i, b_i[$. Montrer que cela reste vrai dans toute extension élémentaire de $\mathbb{R}$, i.e. que, pour toute extension élémentaire $\mathcal{R}$ de $\mathbb{R}$, pour tout $a \in \mathcal{R}$, si on a $\mathcal{R} \vDash (0 \leqslant a) \wedge (a \leqslant 1)$, alors il existe $i \in I$ tel que $\mathcal{R} \vDash (a_i < a) \wedge (a < b_i)$.
   [On pourra commencer par considérer le cas où I est fini.]
2. $(\star)$ On suppose maintenant $]0,1[\subseteq \bigcup_{i\in I}]a_i, b_i[$. Donner une condition nécessaire et suffisante, sur les familles $(a_i)_{i\in I}$ et $(b_i)_{i\in I}$, pour que cette inclusion reste vraie dans toute extension élémentaire de $\mathbb{R}$.

Exercice 4. Soit $\mathcal{L}$ le langage avec un unique symbole f de fonction unaire.

1. Écrire une théorie T dans le langage $\mathcal{L}$ dont les modèles sont exactement les structures (non vides) dans lesquelles f est une bijection telle qu'aucune composée f^n n'a de point fixe, pour $n \geqslant 1$.
2. Montrer que deux modèles de T non-dénombrables de même cardinal sont isomorphes.
3. $(\star)$ Soit $f : \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ un plongement entre modèles de T. Montrer qu'il est élémentaire.
   [On pourra commencer par considérer le cas où le cardinal de N est strictement plus grand que celui de M.]

[1] On rappelle que, dans un anneau de Boole, on a $\top = 1$, $\bot = 0$, $a \wedge b = a \cdot b$ et $a \vee b = a + b + a \cdot b$.