Examen

Logique mathématique

18 janvier 2024

Vous pouvez toujours utiliser une question précédente pour faire les questions suivantes, même si vous n'y avez pas répondu. *La qualité de la rédaction sera prise en compte dans la notation.*

Exercice 1. On travaille dans le langage avec deux symboles de relation binaire $<$ et R. Soit C la classe des structures dans lesquelles $<$ est un ordre total, R est symétrique antiréflexive. Soit T la théorie des structures M dans C telles que pour tous $X, Y \subseteq \mathrm{A}(M)$ finis tels que $X \cap Y = \varnothing$ et $d, g \in \mathrm{A}(M) \cup \{-\infty, +\infty\}$ tel que $g < d$, il existe $a \in \mathrm{A}(M)$ tel que $g < a < d$ et tel que, pour tout $x \in X$, aRx et, pour tout $y \in Y$, $\neg aRy$.

1. Soit $M \models T$, soient A, B des structures finies dans C et $f : A \to M$ et $g : A \to B$ des plongements. Montrer qu'il existe un plongement $h : B \to M$ tel que $h \circ g = f$.
2. Montrer que T a un unique modèle dénombrable à isomorphisme près.
3. Montrer que T élimine les quantificateurs.
4. Montrer que T est complète dans le langage où on rajoute une constante.
5. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que l'algèbre de Boole des formules $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ à équivalence près dans T est finie.

   [Indice: On pourra d'abord montrer que l'espace de Stone associé est fini.]

Exercice 2. Dans cet exercice, les opérations sont celles de l'arithmétique cardinale.

1. Soit κ un cardinal infini. On note $2^{<\kappa} = \sup\{2^\lambda \mid \lambda < \kappa, \lambda \,\text{cardinal}\}$. Montrer que $(2^{<\kappa})^{\mathrm{cof}(\kappa)} = 2^\kappa$.

   [Indice: on pourra, pour une fonction $f : \mathrm{cof}(\kappa) \to \kappa$ strictement croissante cofinale, considérer la partition $(f(\alpha) \setminus \bigcup_{\beta<\alpha} f(\beta))_{\alpha<\mathrm{cof}(\kappa)}$ de κ.]
2. Soit κ un cardinal infini singulier. On suppose qu'il existe un cardinal μ tel que, pour tout cardinal $\lambda < \kappa$ assez grand, on ait $2^\lambda = \mu$. Montrer que $2^\kappa = \mu$.

   [Indice: On pourra utiliser la question précédente.]

(Exercice suivant au dos)

Exercice 3. On travaille dans le langage de l'arithmétique. Soit $\beta : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ une fonction récursive telle que pour tous $c_0, \ldots, c_n \in \mathbb{N}$, il existe $a \in \mathbb{N}$ telle que pour tout $i \leqslant n$, $\beta(a,i) = c_i$. On dit alors que a est un code de $c_0, \ldots, c_n$.

1. Montrer qu'il existe une formule $\varphi(x,y)$ qui est Σ_1 et telle que pour toute formule $\psi(y)$ qui est Σ_1, il existe un entier $n \in \mathbb{N}$ tel que:

$$\mathbb{N} \vDash \forall y\, \psi(y) \leftrightarrow \varphi(\underline{n}, y).$$

Soit $\theta(x)$ une formule. On note $\Sigma_1(\theta)$ le plus petit ensemble de formules qui contient les formules atomiques et leurs négations ainsi que les formules $\theta(t)$ et $\neg\theta(t)$ pour tout terme t, et qui est clos par conjonction, disjonction, quantification universelle bornée[1] et quantification existentielle.

2. Soit $\psi(y_1, \ldots, y_n)$ une formule $\Sigma_1(\theta)$. Montrer qu'il existe une formule $\chi(y_1, \ldots, y_n, s, t)$ qui est Σ_1 et telle que, pour tous $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{N}$, on a $\mathbb{N} \vDash \psi(a_1, \ldots, a_n)$ si et seulement s'il existe $b, c \in \mathbb{N}$ tels que c code la suite finie $[\![\theta(\underline{0})]\!]_{\mathbb{N}}, \ldots, [\![\theta(\underline{b})]\!]_{\mathbb{N}}$ et que

$$\mathbb{N} \vDash \chi(a_1, \ldots, a_n, b, c).$$

3. Montrer qu'il existe une formule $\varphi(x,y)$ qui est $\Sigma_1(\theta)$ et telle que pour toute formule $\psi(y)$ qui est $\Sigma_1(\theta)$, il existe un entier $n \in \mathbb{N}$ tel que:

$$\mathbb{N} \vDash \forall y\, \psi(y) \leftrightarrow \varphi(\underline{n}, y).$$

4. Montrer qu'il existe une formule $\psi(x)$ qui est $\Sigma_1(\theta)$ mais telle que $\neg\psi(x)$ ne soit pas équivalente à une formule $\Sigma_1(\theta)$ dans $\mathbb{N}$.

   [Indice: on pourra utiliser un argument diagonal.]

Par récurrence sur i entier positif, on définit Σ_{i+1} comme étant le plus petit ensemble de formules qui contient les formules Σ_i ainsi que leurs négations, et qui est clos par conjonction, disjonction, quantification universelle bornée et quantification existentielle.

5. Montrer qu'il existe une formule Σ_{i+1} qui n'est pas équivalente à une formule Σ_i.

[1] Si $\varphi(x, y_1, \ldots, y_n)$ est $\Sigma_1(\theta)$ alors $\forall x\, x < y_i \to \varphi$ l'est aussi.