Correction du partiel

Logique mathématique

10 novembre 2023

Vous pouvez toujours utiliser une question précédente pour faire les questions suivantes, même si vous n'y avez pas répondu. Les questions avec une $(\star)$ sont considérées comme plus difficiles. *La qualité de la rédaction sera prise en compte dans la notation.*

Exercice 1. Soit $\mathcal{L}$ le langage $\{R\}$, où R est un prédicat binaire. Soit T la $\mathcal{L}$-théorie exprimant les propriétés suivantes:

- La relation R est une relation d'équivalence,
- Pour tout entier $i \geqslant 1$, il existe une unique classe d'équivalence de cardinal i.

1. Ecrire une liste d'axiomes pour T. On pourra introduire des notations/abréviations pour améliorer la lisibilité.

   Soit θ la formule

   $$\forall x\, xRx \wedge \forall x \forall y\, (xRy \to yRx) \wedge \forall x \forall y \forall z\, [(xRy \wedge yRz) \to xRz]$$

   qui exprime que R est une relation d'équivalence. Pour tout entier $n > 0$, soit $\varphi_{\geqslant n}(x_0)$ la formule

   $$\exists x_1 \ldots \exists x_{n-1} \bigwedge_{i<n} x_i R x_{i-1} \wedge \bigwedge_{i \neq j} x_i \neq x_j$$

   qui exprime que la classe de x_0 a au moins n éléments. Soit $\varphi_{=n}(x_0)$ la formule $\varphi_{\geqslant n}(x_0) \wedge \neg\varphi_{\geqslant n+1}(x_0)$ qui exprime que la classe de x_0 a exactement n éléments et soit ψ_n la formule

   $$\exists x\, [\varphi_{=n}(x) \wedge \forall y\, (\varphi_{=n}(y) \to yRx)]$$

   qui exprime qu'il y a exactement une classe de taille n. La théorie composée de θ et, pour tout $n > 0$, des ψ_n est la théorie recherchée.

Soit M_1 la $\mathcal{L}$-structure $(\mathbb{N}, R^{\mathbb{N}})$, où $R^{\mathbb{N}}$ est l'unique relation d'équivalence sur $\mathbb{N}$ dont les classes sont les $[\frac{i(i-1)}{2}, \frac{i(i+1)}{2}[\cap \mathbb{N}$, pour $i \geqslant 1$. On note $T_1 = \mathrm{Th}(M_1)$ sa $\mathcal{L}$-théorie.

2. Montrer qu'il existe $N \vDash T_1$ tel que R^N a une infinité de classes infinies.

   Soit $\mathcal{L}'$ le langage $\mathcal{L}$ avec de nouvelles constants $c_{i,j}$ pour tous i, j entiers positifs. On considère la $\mathcal{L}'$-théorie

   $$T' = T_1 \cup \{c_{i,j} R c_{i,j'} \wedge c_{i,j} \neq c_{i,j'} : j, j' \text{ distincts}\} \cup \{\neg c_{i,j} R c_{i',j'} : i, i' \text{ distincts}\}.$$

   Montrons qu'elle est finiment consistante. Pour tous i, j avec $j \leqslant i$, soit $a_{i,j} = i(i-1)/2 + j$ — c'est le $(j+1)$ème élément de la classe à $(i+1)$ éléments dans M_1. Pour tout entier n, si on interprète $c_{i,j}$ avec $i, j < n$ comme $a_{n+i,j}$, on obtient un modèle de

   $$T_1 \cup \{c_{i,j} R c_{i,j'} \wedge c_{i,j} \neq c_{i,j'} : i, i', j, j' \leqslant n \text{ avec } j, j' \text{ distincts}\}$$
   $$\cup \{\neg c_{i,j} R c_{i',j'} : i, i', j, j' \leqslant n \text{ avec } i, i' \text{ distincts}\}.$$

Ce qui prouve que T' est finiment constante et donc consistante par compacité. Soit $N' \vDash T'$ et N la $\mathcal{L}$-structure sous-jacente. Alors $N \vDash T_1$ et, par construction, N, la classe de (l'interprétation de) $c_{i,j}$ est infinie puisqu'elle contient les (interprétations des) $c_{i,j'}$ qui sont toutes distinctes, et (les interprétations de) $c_{i,j}$ et $c_{i',j}$ sont dans des classes distinctes. Donc N a bien un nombre infini de classes infinies.

Soit $\mathcal{L}_P$ le langage $\mathcal{L} \cup \{P_i, i \geqslant 1\}$, où les P_i sont des prédicats unaires. Soit $T_P \supseteq T$ la $\mathcal{L}_P$-théorie exprimant les propriétés *supplémentaires* suivantes:

- Le prédicat P_i est interprété comme l'unique classe de taille i.

3. Montrer que T_P élimine les quantificateurs.

   Soient M et $N \vDash T_P$, $E \subseteq \mathrm{A}(M)$, $f : E \to N$ un plongement et $a \in \mathrm{A}(M)$. Si $a \in P_i^M$ pour un entier i, alors $E \cap P_i^M$ est de cardinal au plus $i - 1$ et donc, il existe $b \in P_i^N$ qui ne soit pas dans $f(E)$. Soit g qui étend f et telle que $g(a) = b$. Alors g est injective et pour tout $e \in E$,

$$\begin{aligned} eR^M a &\Leftrightarrow e \in P_i^M \\ &\Leftrightarrow f(e) \in P_i^N \\ &\Leftrightarrow f(e) R^N b \end{aligned}$$

   et donc g est bien un plongement.

   Si a n'est dans aucun des P_i^M alors la classe de a est infinie. Supposons qu'il existe $e \in E$ tel que $eR^M a$. Alors, $f(e)$ n'est dans aucun des P_i^N et donc sa classe est infinie. Par compacité, l'ensemble de formules $\mathrm{D}^{\mathrm{el}}(N) \cup \{xRc_{f(e)}\} \cup \{x \neq c_{f(a)} : a \in E\}$ est consistant puisque chaque sous-ensemble fini peut être réalisé dans N. Il existe donc un plongement élémentaire $h : N \to N^\star$ et $b \in \mathrm{A}(N^\star) \smallsetminus f(E)$ tel que $bR^N h(f(e))$. On définit alors g qui étend f envoie a sur b. Elle est injective et pour tout $e' \in E$,

$$\begin{aligned} e'R^M a &\Leftrightarrow e'R^M e \\ &\Leftrightarrow f(e')R^N f(e) \\ &\Leftrightarrow f(e')R^N b \end{aligned}$$

   et donc g est bien un plongement.

   Enfin, supposons que a n'est dans aucun des P_i^M et qu'il n'existe pas de $e \in E$ tel que $aR^M e$. Alors, par compacité, l'ensemble $\mathrm{D}^{\mathrm{el}}(N) \cup \{\neg xRc_{f(a)} : a \in E\}$ est consistant puisque chaque sous-ensemble fini peut être réalisé dans N — on rappelle qu'il y a un nombre infini de classes dans N. Il existe donc un plongement élémentaire $h : N \to N^\star$ et $b \in \mathrm{A}(N^\star)$ qui ne soit dans la classe d'aucun $f(e)$, pour $e \in E$. Soit alors g qui étend f et telle que $g(a) = b$. Elle est bien injective et elle préserve R puisque a n'est dans la classe d'aucun élément de E et b n'est dans la classe d'aucun élément de $f(E)$.

   Dans tous les cas, on peut donc étendre f à a (quitte à augmenter le codomaine de manière élémentaire) et donc T élimine les quantificateurs.

4. En déduire que T_P est complète[1].

   Soient $M, N \vDash T_P$. Comme $\mathcal{L}$ n'a pas de constantes, le plongement de domaine vide de M dans N est élémentaire et donc $M \equiv N$.

[1] Une théorie T_0 dans un langage $\mathcal{L}_0$ est complète si, pour tout $\mathcal{L}_0$-énoncé φ, on a $T_0 \vDash \varphi$ ou $T_0 \vDash \neg\varphi$.

5. Montrer que M_1 se plonge élémentairement dans tout modèle de T.

   Soit $N \vDash T$ pour tout entier i, soit $c_{i,j}$ (pour $j < i$) une énumération de la classe de taille i. Soit $a_{i,j} = i(i-1)/2 + j$ et $f : \mathbb{N} \to \mathrm{A}(N)$ qui envoie $a_{i,j}$ sur $c_{i,j}$. Alors f est injective et préserve R. Elle préserve aussi P_i quand on l'interprète (dans M_1 et N) comme l'unique classe de taille i. C'est donc un $\mathcal{L}_P$-plongement qui est donc élémentaire. En particulier, il est élémentaire dans $\mathcal{L}$.

6. $(*)$ Soit $\mathrm{Def}_1(M_1) \leqslant P(M_1)$ l'algèbre de Boole des sous-ensembles $\mathcal{L}(M_1)$-définissables (i.e. définissables avec des $\mathcal{L}$-formules à paramètres dans M_1) de M_1. Soit $S_1(M_1)$ l'espace des ultrafiltres sur $\mathrm{Def}_1(M_1)$. Décrire, en justifiant, l'ensemble sous-jacent à $S_1(M_1)$.

   Soit $p \in S_1(M_1)$. Par compacité, il existe un plongement élémentaire $h : M_1 \to N$ et $b \in N$ tel que pour toute formule $\varphi(x, y_1, \ldots, y_n)$ et $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{N}$, si $\varphi(x, a_1, \ldots, a_n) \in p$ alors $N \vDash \varphi(b, a_1, \ldots, a_n)$ — en considérant la négation, on a en fait, $\varphi(x, a_1, \ldots, a_n) \in p$ si et seulement si $N \vDash \varphi(b, a_1, \ldots, a_n)$.

   S'il existe $a \in \mathbb{N}$ tel que $bR^N a$. Soit n le cardinal de la classe de a. Alors la classe de a dans N est aussi de taille n puisque le plongement est élémentaire et donc est incluse dans $\mathbb{N}$. Donc $b \in \mathbb{N}$ et p est alors le filtre engendré par $x = a$. Sinon, b n'est équivalent à aucun élément de $\mathbb{N}$ et p contient le filtre engendré par $\{\neg xRa : a \in \mathbb{N}\}$. Ce filtre contient aussi toutes les formules $\{x \neq a : a \in \mathbb{N}\}$ puisque $\neg xRa \to \neg x = a$. Ce filtre contient donc les négations des toutes les formules atomiques et, par élimination des quantificateurs, il engendre un ultrafiltre.

   Pour conclure, les éléments de $S_1(M_1)$ sont donc soient les filtres engendrés par $x = a$, pour un $a \in \mathbb{N}$, soit l'unique filtre engendré par $\neg xRa$, pour tous $a \in \mathbb{N}$ — c'est d'ailleurs aussi le le filtre engendré par les $\neg x = a$, pour tous $a \in \mathbb{N}$.

   *Comme certain d'entre vous l'ont aussi remarqué, les formules atomiques en une variable définissent toutes des ensembles finis. L'algèbre de Boole des ensembles définissables en une variable est l'algèbre des parties finies et cofinies de $\mathrm{A}(M_1)$ donc les ultrafiltres sont soit principaux (*i.e. *engendrés par un singleton), soit l'ultrafiltre qui contient tous les ensembles confinis.*

Exercice 2. L'objectif de cet exercice est de décrire la théorie universelle des ordres totaux. Soit $\mathcal{L}$ le langage $\{<\}$. Une *formule universelle* est de la forme $\forall x_1 \cdots \forall x_n\, \varphi$, où φ est une formule sans quantificateurs. Un énoncé universel est une formule universelle qui est un énoncé. Pour toute collection d'énoncés T, on note $T_\forall$ la collection des énoncés universels qui sont conséquences de T. Soit T_0 la $\mathcal{L}$-théorie des ordres totaux *infinis*.

1. Soient M, N des modèles de T_0. Montrer qu'il existe un plongement élémentaire $N \to N^\star$ et un plongement $M \to N^\star$.

   On considère l'ensemble de $\mathcal{L}(M) \cup \mathcal{L}(N)$-formules $\Sigma = \mathrm{D}^{\mathrm{el}}(N) \cup \{c_a < c_b : a < b \text{ dans} M\}$ — on suppose ici que les constantes pour les éléments de M et ceux de N sont distinctes. Il suffit, pour conclure, de montrer que Σ est consistant. En effet, soit $N' \vDash \Sigma$ et $N^\star$ le modèle sous-jacent. Comme $N^\star \vDash \mathrm{D}^{\mathrm{el}}(N)$, il existe un plongement élémentaire $N \to N^\star$ et, comme $N^\star \vDash \{c_a < c_b : a < b \text{ dans} M\}$, la fonction $f : M \to N^\star$ définie par $f(a) = c_a^{N'}$ est une fonction strictement croissante, c'est-à-dire un plongement $M \to N^\star$

   Par compacité, il suffit de montrer que Σ est finiment consistante. Soit $A \subseteq M$ fini. Comme N est infini. il existe $B \subseteq N$ de même cardinal n que A. Soient $a_1, \ldots, a_n \in A$ (respectivement $b_1, \ldots, b_n \in B$) une énumération croissante. En interprétant c_{a_i} par b_i, on obtient un modèle de $\mathrm{D}^{\mathrm{el}}(N) \cup \{c_a < c_b : a < b \text{ dans} A\}$, ce qui montre que Σ est finiment consistante.

2. En déduire que, pour tous M, N modèles de T_0, on a $\mathrm{Th}_{\mathcal{L}}(M)_\forall = \mathrm{Th}_{\mathcal{L}}(N)_\forall$. On pourra démontrer un résultat reliant plongements et énoncés universels.

   Soit $\varphi = \forall x_1 \forall x_n \psi$ *un énoncé universel,* $N^\star$ *tel qu'à la question précédente et* $f : M \to N^\star$ *un plongement. Si* $N \vDash \varphi$ *alors* $N^\star \vDash \varphi$ *et donc, pour tous* $a_1, \ldots, a_n \in A$, $N^\star \vDash \psi(f(a_1), \ldots, f(a_n))$. *Comme* f *est un plongement, on a alors* $M \vDash \psi(a_1, \ldots, a_n)$. *Il s'ensuit que* $M \vDash \varphi$.

   On a donc $\mathrm{Th}_{\mathcal{L}}(N)_\forall \subseteq \mathrm{Th}_{\mathcal{L}}(M)_\forall$. *Par symétrie, ces ensembles sont égaux.*