

TD de Logique 2 (Ordinaux)

3 et 6 octobre 2014

Les exercices qui ne sont pas abordés en cours, seront (certainement) corrigés sur ma page personnelle (voir ci-dessus).

Exercice 1 (Contre-exemples) :

1. Donner des ordinaux α, α', β tels que $(\alpha + \alpha')\beta \neq \alpha\beta + \alpha'\beta$.
2. Trouver une suite strictement croissante $(\alpha_n)_{n < \omega}$ d'ordinaux et un ordinal β tels que $(\bigcup_{n < \omega} \alpha_n)\beta$ soit différent de $\bigcup_{n < \omega} (\alpha_n\beta)$.
3. Trouver β et $1 < \alpha, \alpha' < \beta$ tels que $\alpha\beta = \beta \neq \alpha'\beta$ et α .
4. Trouver α, β et γ tels que $(\alpha\beta)^\gamma \neq \alpha^\gamma\beta^\gamma$.
5. Trouver λ limite et α tels que $\lambda^\alpha \neq \sup_{\beta < \lambda} \beta^\alpha$.

Exercice 2 (Calcul ordinal) :

1. Calculer $\omega.\omega^2, \omega.\omega^\omega, \omega^\omega.\omega, \omega(\omega^\omega + 1), (\omega^\omega + 1)\omega$.
2. Soit α un ordinal infini, montrer qu'il existe β limite et $n \in \omega$ tel que $\alpha = \beta + n$.
3. Montrer qu'il n'existe pas d'ordinal α tel que $\omega^2 = \alpha + \omega$.

Exercice 3 (Ordinaux et topologie) :

Soit α un ordinal muni de la topologie de l'ordre (i.e. la topologie dont une base d'ouverts est donnée par les intervalles ouverts (a, b) avec $a < b \in \alpha \cup \{+\infty, -\infty\}$). Montrer que :

1. α est séparé.
2. $\beta \in \alpha$ est isolé si et seulement si β est successeur ou zéro.
3. α est discret si et seulement si $\alpha \subseteq \omega$.
4. α est compact si et seulement si α est successeur ou zéro.

Exercice 4 (Points fixes) :

Soit F une fonction croissante des ordinaux dans les ordinaux, on dit que F est *continue* si, pour tout ordinal limite λ , $F(\lambda) = \bigcup_{\alpha < \lambda} F(\alpha)$.

1. Trouver un ordinal α tel que $\alpha = \omega + \alpha$, un ordinal β tel que $\beta = \omega\beta$ et un ordinal γ tel que $\gamma = \omega^\gamma$.
2. Soit F croissante continue telle que $F(\alpha) \geq \alpha$ pour tout ordinal α . Montrer que pour tout ordinal α , il existe un plus petit point fixe de F qui soit supérieur à α .
3. Si G est une autre telle application, montrer qu'il existe un point fixe commun à F et G .
4. Montrer que $\alpha = \omega + \alpha$ si et seulement si $\alpha \geq \omega^2$.
5. Montrer que $\alpha = \omega\alpha$ si et seulement si il existe β tel que $\alpha = \omega^\omega\beta$.

Exercice 5 (Forme normale de Cantor) :

On appelle forme normale de Cantor, toute écriture de la forme :

$$\omega^{\alpha_1}k_1 + \dots + \omega^{\alpha_n}k_n$$

avec $n \in \mathbb{N}$, $k_1, \dots, k_n \in \omega \setminus \{0\}$ et $\alpha_1 > \dots > \alpha_n$.

1. Montrer que, si α est non nul, il existe β tel que $\omega^\beta \leq \alpha < \omega^{\beta+1}$.
2. Montrer que tout ordinal admet une unique forme normale de Cantor.
3. Décrire l'ordre et l'addition pour des ordinaux en forme normale de Cantor.

Exercice 6 (Somme naturelle sur les ordinaux) :

Soient α et β des ordinaux. On choisit une suite finie d'ordinaux $\gamma_1 > \dots > \gamma_n$ telle que

$$\alpha = \omega^{\gamma_1} k_1 + \dots + \omega^{\gamma_n} k_n \quad \text{et} \quad \beta = \omega^{\gamma_1} l_1 + \dots + \omega^{\gamma_n} l_n$$

avec $k_i, l_i \in \omega$ pour $1 \leq i \leq n$. La *somme naturelle* de α et β est définie ainsi :

$$\alpha \oplus \beta = \omega^{\gamma_1} (k_1 + l_1) + \dots + \omega^{\gamma_n} (k_n + l_n)$$

1. Montrer que \oplus est commutative.
2. Montrer que $\beta < \beta'$ entraîne $\alpha \oplus \beta < \alpha \oplus \beta'$ pour tout α .
3. Montrer que $\alpha + \beta \leq \alpha \oplus \beta$ pour tout α et β .
4. Montrer que toute opération binaire \oplus^* sur les ordinaux qui est strictement croissante dans les deux arguments est minorée par \oplus .

Exercice 7 (Suites de Goodstein) :

Soient n, p deux entiers. On définit l'écriture de n en base p -itérée de la manière suivante : on écrit d'abord n en base p (par exemple pour $n = 35, p = 2, 35 = 2^5 + 2 + 1$.) Ensuite, on écrit les exposants eux-mêmes en base p et ainsi de suite de sorte que tous les nombres écrits sont inférieurs à p . Ainsi on écrira $35 = 2^{2^{2+1}} + 2 + 1$.

Pour $q \geq p \geq 2$, on définit la fonction $f_{p,q}$ de \mathbb{N} dans \mathbb{N} de la manière suivante : Soit n un entier. On écrit n en base p itérée et on remplace dans cette écriture tous les p par des q . Le nombre ainsi formé est $f_{p,q}(n)$. On définit de la même manière les fonctions $f_{p,\omega}$ en remplaçant p par ω (dans le cas où $p > 2$, on écrira les coefficients à droite des p^n).

1. Que vaut $f_{2,3}(35)$? et $f_{3,\omega}(35)$?
2. Montrer que pour tous $\omega \geq r > q > p \geq 2$, on a $f_{q,r} \circ f_{p,q} = f_{p,r}$.
3. Montrer que les fonctions $f_{p,\omega}$ sont strictement croissantes.

Pour tout entier a , on appelle *suite de Goodstein* de a la suite $(g_n(a))_{n \geq 2}$ définie par :

$$g_2(a) = a \quad \text{et} \quad g_{n+1}(a) = \begin{cases} f_{n,n+1}(g_n(a)) - 1 & \text{si } g_n(a) \neq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

4. Calculer les 5 premiers termes de la suite de Goodstein pour 5.
5. Soit a un entier. Étudier la monotonie de la suite des $f_{p,\omega}(g_p(a))$.
6. Montrer que pour tout entier a la suite de Goodstein pour a est nulle à partir d'un certain rang.

Exercice 8 (Qui sont ces charmants messieurs ?) :

