Silvain Rideau
Bureau T5

silvain.rideau@ens.fr
www.eleves.ens.fr/home/srideau

Corrigé du TD de Logique 3 (Cardinaux et cofinalité)

10 et 13 octobre 2014

Exercice 1 (Cofinalité) **:**

1. Si α est dénombrable, $\mathrm{cof}(\alpha) \leqslant \aleph_0$ et comme pour tout $n < \omega$, $\mathrm{cof}(n) = 1$, la cofinalité de X est soit 1 (s'il est successeur) soit $\aleph_0$ (s'il est limite). On a donc $\mathrm{cof}(\omega^2) = \aleph_0$ et $\mathrm{cof}(\omega^\omega) = \aleph_0$. En général, si $\alpha = \beta + 1$ est successeur $\mathrm{cof}(\omega^\alpha) = \mathrm{cof}(\bigcup_n \omega^\beta n) = \aleph_0$ et si α est limite $\mathrm{cof}(\omega^\alpha) = \mathrm{cof}(\bigcup_{\beta<\alpha}\omega^\beta) = \mathrm{cof}(\alpha)$. Pour cette dernière égalité, c'est un cas particulier du fait général suivant (qui doit être sous une forme ou une autre dans le cours) :

   Lemme 1 :
   Soit $\gamma = \bigcup_{\beta<\alpha}\gamma_\alpha$ où $\alpha \mapsto \gamma_\alpha$ est strictement croissante. Alors $\mathrm{cof}(\gamma) = \mathrm{cof}(\alpha)$.

   Démonstration. Soit $f : \mathrm{cof}(\alpha) \to \alpha$ cofinale, alors $g : \beta \mapsto \gamma_{f(\beta)}$ est cofinale dans γ. D'où $\mathrm{cof}(\gamma) \leqslant \mathrm{cof}(\alpha)$. Réciproquement, soit $f : \mathrm{cof}(\gamma) \to \gamma$ cofinal, alors $g : \beta \mapsto \min\{\delta \in \alpha : f(\beta) \in \gamma_\delta\}$ est cofinale et donc $\mathrm{cof}(\alpha) \leqslant \mathrm{cof}(\gamma)$ (pour ceux d'entre vous qui s'inquiéteraient que g n'est pas strictement croissante, on peut toujours la rendre strictement croissante quitte à se restreindre à un sous-ensemble de $\mathrm{cof}(\gamma)$ qui est donc isomorphe à $\delta \leqslant \mathrm{cof}(\gamma)$). ■

   Enfin $\mathrm{cof}(\omega^0) = 1$.

   On a aussi $\mathrm{cof}(\alpha + \beta) = \mathrm{cof}(\beta)$ quand $\beta \neq 0$ et $\mathrm{cof}(\alpha + \beta) = \mathrm{cof}(\alpha)$ sinon. Et enfin, si $\alpha \neq 0$, $\mathrm{cof}(\aleph_{\omega^\alpha}) = \mathrm{cof}(\bigcup_{\beta<\omega^\alpha}\aleph_\beta) = \mathrm{cof}(\omega^\alpha)$ (et on se réfère à la discussion précédente) et sinon $\mathrm{cof}(\aleph_{\omega^0}) = \mathrm{cof}(\aleph_1) = \aleph_1$.

2. Si $\lambda \geqslant \kappa$ (en particulier $\lambda \geqslant \mathrm{cof}(\kappa)$), alors en posant $\kappa_\alpha = 1$ si $\alpha < \kappa$ et $\kappa_\alpha = 0$ sinon, on obtient bien $\kappa = \sum_{\alpha<\lambda}\kappa_\alpha$.

   Si $\mathrm{cof}(\kappa) \leqslant \lambda < \kappa$ alors κ est singlier et c'est donc un ordinal limite, i.e. il existe γ ordinal limite tel que $\kappa = \aleph_\gamma = \bigcup_{\alpha<\gamma}\aleph_\alpha$. Comme $\mathrm{cof}(\gamma) = \mathrm{cof}(\beta) \leqslant \lambda$, il existe $\beta \leqslant \lambda$ et une suite $(\gamma_\alpha)_{\alpha<\beta}$ strictement croissante d'ordinaux telles que $\sup_{\alpha<\beta}\gamma_\alpha = \gamma$. Pour $\alpha < \beta$, on pose $\kappa_\alpha = \aleph_{\gamma_\alpha}$ et pour $\alpha \geqslant \beta$, on pose $\kappa_\alpha = 0$. On a bien

   $$\sum_{\alpha<\lambda}\kappa_\alpha = \sum_{\alpha<\beta}\kappa_\alpha = \sup(\beta, \aleph_{\gamma_\alpha} : \alpha < \beta) = \kappa.$$

   Enfin si $\lambda < \mathrm{cof}(\kappa)$ et $\kappa_\alpha < \kappa$ pour tout α, on a alors $\sup_{\alpha<\lambda}\kappa_\alpha < \kappa$ et par suite $\sum_{\alpha<\lambda}\kappa_\alpha < \kappa$.

3. Soit $f : \kappa \to \lambda$ une application croissante. On note $A = \{\alpha \in \kappa : \forall\beta < \alpha,\ f(\beta) < f(\alpha)\}$. Il est évident que $f|_A$ est strictement croissante et donc injective et que $|A| \leqslant \lambda$. Comme $\lambda < \mathrm{cof}(\kappa)$ il existe $\alpha < \kappa$ tel que $A \subseteq \alpha$. Supposons qu'il existe $\beta > \alpha$ tel que $f(\beta) > f(\alpha)$. On peut prendre un tel β minimal. Alors pour tout $\gamma < \beta$, $f(\gamma) \leqslant f(\alpha) < f(\beta)$ et donc $\beta \in A$, ce qui est absurde. On a donc démontré que pour tout $\beta \geqslant \alpha$, $f(\beta) = f(\alpha)$.

Exercice 2 :
On sait que $(X, <)$ est un ensemble bien ordonné de $\aleph_1$, il est donc isomorphe à $(\alpha, <)$ pour un certain ordinal $\alpha \leqslant \aleph_1$. La cofinalité de $\aleph_1$ est $\aleph_1$, donc comme X est cofinal dans $\aleph_1$, on a aussi $\alpha \geqslant \aleph_1$. Donc $\alpha = \aleph_1$ et donc $(X, <)$ est isomorphe à $(\aleph_1, <)$

Exercice 3 :
On note $\mathfrak{F}(\lambda, \kappa)$ l'ensemble des fonctions de λ dans κ. Cet ensemble a pour cardinalité κ^λ. Notons $[\kappa]^\lambda$ l'ensemble des parties de κ de cardinalité $\leqslant \lambda$. On a une surjection $f : \mathfrak{F}(\lambda, \kappa) \to [\kappa]^\lambda$ définie en associant à tout $h \in \mathfrak{F}(\lambda, \kappa)$ son image.
On a aussi une injection $g : \mathfrak{F}(\lambda, \kappa) \to [\kappa \cdot \lambda]^\lambda$ obtenue en associant à toute fonction $h \in \mathfrak{F}(\lambda, \kappa)$ son graphe. Or il existe une bijection de $\kappa \cdot \lambda$ dans κ, donc $|[\kappa \cdot \lambda]^\lambda| = |[\kappa]^\lambda|$. Il s'en suit que $|[\kappa]^\lambda| = \kappa^\lambda$.

Exercice 4 :

1. On considère l'ensemble $K(\alpha) \subseteq \kappa$ défini comme l'ensemble des $l < \kappa$ tels qu'il existe $i, j < \alpha$ satisfaisant $a_i + a_i = a_l$ ou $-a_i = a_l$. Alors $K(\alpha)$ a pour cardinal $|\alpha|\aleph_0$. En particulier, comme κ est régulier, il n'est pas cofinal dans κ. Soit β un ordinal tel que $\alpha \geqslant \beta$ et $K(\alpha) \subseteq \beta$. Le groupe engendré par A_α est inclu dans A_β.

2. Soit f qui a α associe le plus petit ordinal tel que le groupe engendré par A_α soit inclu dans A_β et soit $\beta = \sup_n f^n(\alpha)$. Comme κ est régulier, on a $\beta < \kappa$ et A_β est un sous-groupe de G. En effet, si on prend $a_i, a_j \in A_\beta$, alors $a_i, a_j \in A_{f^n(\alpha)}$ pour un certain n, et $a_i + a_j \in A_{f^{n+1}(\alpha)}$.

Exercice 5 (Exponentielle cardinal sous (HGC)) **:**

1. Comme $\kappa \leqslant 2^\kappa$, $\kappa^\lambda \leqslant (2^\kappa)^\lambda = 2^{\kappa\lambda}$. On peut aussi considérer le graphe comme dans la question précédente.

2. Si $\lambda \geqslant \kappa^+$, on a
$$(\kappa^+)^\lambda \geqslant 2^{\kappa^+\lambda} = 2^\lambda \leqslant \kappa^\lambda \leqslant (\kappa^+)\lambda$$
et donc $(\kappa^+)^\lambda = \kappa^\lambda$. Comme de plus $\kappa^+ \leqslant 2^\kappa \leqslant 2^\lambda \leqslant \kappa^\lambda$, on a le résultat voulu.

   Le cas restant est celui de $\lambda \leqslant \kappa$. Soit $f : \lambda \to \kappa^+$ une fonction ; alors comme κ^+ est régulier et $\lambda < \mathrm{cof}(\kappa^+)$, il existe un ordinal $\alpha < \kappa^+$ tel que $\mathfrak{I}f \subset \alpha$. On a donc que l'ensemble des fonctions de λ dans κ est la réunion, pour $\alpha < \kappa^+$, de l'ensemble des fonctions de λ dans α. Pour un α donné, il y a au plus $|\alpha|^\lambda \leqslant \kappa^\lambda$ telles fonctions et cette borne est atteinte. Nous avons donc que $(\kappa^+)^\lambda = \sup\{\kappa^+, |\alpha|^\lambda : \alpha < \kappa^+\} = \kappa^+\kappa^\lambda$.

3. Si λ est fini, $\aleph_n^\lambda = \aleph_n = \aleph^n 2^\lambda$. On peut donc supposer que λ est infini.

   Par le raisonnement fait maintes fois déjà, on a $\aleph_0^\lambda = 2^\lambda > \aleph_0$ et donc $\aleph_0^\lambda = 2^\lambda\aleph_0$. Supposons maintenant le résultat vrai pour $\aleph_n$. Par 2. on a $\aleph_{n+1}^\lambda = \aleph_{n+1}\aleph_n^\lambda = \aleph_{n+1}\aleph_n 2^\lambda = \aleph_{n+1}2^\lambda$.

4. Si $\lambda \geqslant \kappa$, on a $\kappa^\lambda \leqslant 2^{\kappa\lambda} = 2^\lambda \leqslant \kappa^\lambda$, donc $\kappa^\lambda = 2^\lambda = \lambda^+$.

   On suppose donc maintenant $\lambda < \kappa$. On a donc que $\kappa^\lambda \leqslant 2^{\kappa\lambda} = 2^\kappa = \kappa^+$.

   Si $\mathrm{cof}(\kappa) \leqslant \lambda$, il suffit de montrer que $\kappa^\lambda > \kappa$. Par l'exercice 1.1, on peut écrire $\kappa = \sum_{\alpha<\lambda} \kappa_\alpha$ où les κ_α sont des cardinaux strictement inférieurs à κ. Par le lemme de König, on a $\kappa^\lambda > \sum_{\alpha<\lambda} \kappa_\alpha = \kappa$.

   Si $\lambda < \mathrm{cof}(\kappa)$, alors, comme dans 2., on écrit κ^λ comme une union indexée par les éléments de κ, d'ensembles de cardinalité μ^λ, où $\mu < \kappa$. Par (HGC), $\mu^\lambda \leqslant \kappa$, car $\mu^\lambda \leqslant 2^{\mu\lambda} = (\mu\lambda)^+ \leqslant \mu^+\lambda^+ \leqslant \kappa$. Cette union est donc de cardinalité $\leqslant \kappa\kappa = \kappa$.

Exercice 6 (Ensembles clos cofinaux) **:**

1. Notons $C = \bigcap_{i<\lambda} C_i$. Montrons que C est cofinal. Soit $\alpha_0 < \kappa$. On définit par récurrence sur (α, β) ordonné lexicographiquement une suite $(a_\alpha^i : \alpha < \lambda, i < \lambda)$. On pose $a_0^0 = \alpha_0$. Ensuite soient $\alpha, i < \lambda$ et supposons $a_{\alpha'}^{i'}$ défini pour $(\alpha', i') < (\alpha, i)$. Soit $s = \sup\{a_{\alpha'}^{i'} : (\alpha', i') < (\alpha, i)\}$. Comme κ est régulier, un sup d'un ensemble d'éléments de κ de cardinalité $< \kappa$ est strictement inférieur à κ. On a donc $s < \kappa$. Comme C_i est cofinal, il existe $a \in C_i$ tel que $a > s$. On pose alors $a_\alpha^i = a$.

   Une fois la suite construite, considérons $t = \sup\{a_\alpha^i : \alpha, i < \lambda\}$. On a à nouveau $t < \kappa$. De plus, notant $A_i = \{a_\alpha^i : i < \lambda\}$, on a $A_i \subset C_i$ par construction et $t = \sup A_i$ pour tout $i < \lambda$. Comme les C_i sont clos, $t \in C_i$ pour tout i. Ainsi $t \in C$ et $t \geqslant \alpha_0$, donc C est cofinal.

   Le fait que C soit clos est évident.

2. Notons $C = \triangle_{i<\kappa} C_i$. Il est facile de voir que C est clos. Montrons que C est cofinal. Soit $\alpha_0 < \kappa$. On définit par récurrence une suite $(\alpha_n : n < \omega)$ d'éléments de κ telle que, pour $0 < n < \omega$, on ait $\alpha_n > \alpha_{n-1}$ et $\alpha_n \in \bigcap_{i<\alpha_{n-1}} C_i$. On peut construire une telle suite puisque par la question précédente, $\bigcap_{i<\alpha_{n-1}} C_i$ est cofinal dans κ. Posons $\alpha_\infty = \sup\{\alpha_n : n < \omega\}$. On vérifie facilement que $\alpha_\infty \in C$.

3. Supposons par l'absurde que le résultat soit faux pour une fonction régressive f. Ainsi, pour tout $\alpha < \kappa$, l'ensemble $S_\alpha = f^{-1}(\{\alpha\})$ n'est pas stationnaire. Il existe donc un club C_α tel que $S_\alpha \cap C_\alpha = \varnothing$. Considérons l'intersection diagonale $C = \triangle_{\alpha<\kappa} C_\alpha$. Par la question précédente, C est un club. Comme S est stationnaire, il existe $\beta \in C \cap S$. On a $\beta \in \bigcap_{\alpha<\beta} C_\alpha$. Donc par hypothèse, pour tout $\alpha < \beta$, $\beta \notin S_\alpha$. Mais d'autre part $\beta \in S_{f(\beta)}$ et $f(\beta) < \beta$. Contradiction.

Exercice 7 (Théorème de Solovay) :

1. Supposons $S \subseteq E^\kappa_\omega$. Pour tout $\alpha \in S$, il existe une suite strictement croissante $(a^\alpha_n : n < \omega)$ tendant vers α.

   Lemme 2 :
   Il existe $n < \omega$ tel que pour tout $\eta < \kappa$, $S_{\eta,n} := \{\alpha \in S : a^\alpha_n > \eta\}$ est stationnaire dans κ.

   Démonstration. Supposons que ce ne soit pas le cas. Alors pour tout n, il existe $\eta_n < \kappa$ et un club C_n tel que $S_{\eta,n} \cap C_n = \varnothing$. Comme κ est indénombrable, l'intersection $C = \bigcap_{n<\omega} C_n$ est encore un club. On pose $\eta = \sup_{n<\omega} \eta_n$, alors $\eta < \kappa$. Comme S est stationnaire, il existe $\alpha \in S \cap C$, $\alpha > \eta + \omega$. Par hypothèse, la suite $(a^\alpha_n)_{n<\omega}$ tend vers α. Donc il existe n tel que $a^\alpha_n > \eta$. Ainsi $\alpha \in S_{\eta,n}$ ce qui contredit le fait que $S_{\eta,n}$ est disjoint de C. ■

   Fixons maintenant n tel que $S_{\eta,n}$ soit stationnaire pour tout $\eta < \kappa$. On définit une fonction $f : S \to \kappa$ par $f(\alpha) = a^\alpha_n$. Alors f est régressive. On construit par récurrence une suite strictement croissante $(\eta_\alpha : \alpha < \kappa)$ et des ensembles stationnaire $(T_\alpha : \alpha < \kappa)$ de la manière suivante.

   Soit $\alpha < \kappa$. On pose $\eta = \sup\{\eta_\beta : \beta < \alpha\}$ (et $\eta = 0$ si $\alpha = 0$). On a $\eta < \kappa$ car κ est régulier. Par hypothèse sur n, l'ensemble $S_{\eta,n}$ est stationnaire. Par le lemme de Fodor, il existe γ tel que $T := f^{-1}(\{\gamma\}) \cap S_{\eta,n}$ est stationnaire. On pose alors $\eta_\alpha = \gamma$ et $T_\alpha = T$.

   Par récurrence immédiate, la suite $(\eta_\alpha : \alpha < \kappa)$ ainsi construite est strictement croissante et les T_α sont disjoints deux-à-deux. De plus, les T_α sont stationnaires. On a donc obtenu la décomposition voulue.

2. On remarque tout d'abord que l'argument utilisé dans la question 1. se généralise immédiatement au cas où $S \subset E^\kappa_\lambda$ pour un $\lambda < \kappa$.

   Considérons la fonction f qui à $\alpha \in S$ associe $\mathrm{cof}(\alpha)$. Par hypothèse, c'est une fonction régressive. Par lemme de Fodor, il existe $T \subseteq S$ sur lequel elle est constante, égale à un $\lambda < \kappa$. Alors par la remarque précédente, T s'écrit comme réunion disjointe de κ ensembles stationnaires, donc S aussi.

3. Supposons que T ne soit pas stationnaire et soit $C \subset \kappa$ un club tel que $T \cap C = \varnothing$. Soit $C' \subseteq C$ l'ensemble des points qui sont limites de points de C. Alors C' est un club dans κ. Comme S est stationnaire, $S \cap C'$ est non vide. Soit α son plus petit élément. Alors α est un cardinal régulier. Par définition de C', $C \cap \alpha$ est un club dans α, donc $C' \cap \alpha$ aussi. Or S est disjoint de $C' \cap \alpha$, donc $\alpha \in T$. Contradiction.

4. On peut supposer que S n'est constitué que d'ordinaux limites, car les ordinaux limites forment un club. Par les questions précédentes, on peut de plus supposer que

   $$T := \{\alpha \in S : \alpha \text{ est un cardinal régulier et } S \cap \alpha \text{ n'est pas stationnaire dans } \alpha\}$$

   est stationnaire (sinon son complémentaire dans S l'est et on peut appliquer 2.). On suit alors de près la preuve de 1.

   Pour $\alpha \in T$, il existe une suite croissante continue $(a^\alpha_\xi : \xi < \alpha)$ telle que $a^\alpha_\xi \notin S$ et $\lim_{\xi \to \alpha} a^\alpha_\xi = \alpha$.

   Lemme 3 :
   Il existe $\xi < \kappa$ tel que pour tout $\eta < \kappa$, $T_{\eta,\xi} := \{\alpha \in T : a^\alpha_\xi > \eta\}$ est stationnaire dans κ.

   Démonstration. Supposons que ce ne soit pas le cas. Pour tout $\xi < \kappa$, il existe alors $\eta_\xi < \kappa$ et un club $C_\xi \subset \kappa$ tel que $T_{\eta_\xi,\xi} \cap C_\xi = \varnothing$. Soit C l'intersection diagonale des C_ξ. On sait que C est un club. Soit D l'ensemble des $\alpha < \kappa$ tels que $\eta_\xi < \alpha$ pour tout $\xi < \alpha$. Alors D est un club (exercice...), donc $C \cap D$ aussi. On peut donc trouver $\gamma < \alpha$ deux éléments de $C \cap D \cap T$. On a alors, pour $\xi < \gamma$, $a^\alpha_\xi < \gamma$. Donc $a^\alpha_\gamma = \gamma$ (souvenez-vous que γ est un cardinal régulier). Ceci contredit le fait que $a^\alpha_\gamma \notin S$. ■

   Le lemme étant acquis, on finit la preuve exactement comme en 1.

Exercice 8 (Nombre de Dedekind) :

1. a) Soit (Γ,Δ) une coupure du bon ordre $(I,<)$. On a ou bien $\Delta=\varnothing$ et alors $(\Gamma,\Delta)=(I,\varnothing)$, ou bien Δ contient un élément minimal δ, car il s'agit d'un bon ordre. Il est alors clair que $(\Gamma,\Delta)=(\Gamma_{<\delta},\Delta_{\geqslant\delta})$, où $\Gamma_{<\delta}=\{i\in I : i<\delta\}$ et $\Delta_{\geqslant\delta}=\{i\in I : \delta\leqslant i\}$. Réciproquement, $(I,\varnothing)$ ainsi que, pour tout $\delta\in I$, la partition $(\Gamma_{<\delta},\Delta_{\geqslant\delta})$ définissent bien des coupures qui sont 2-à-2 distinctes, et $C(I)$ est en bijection avec l'ensemble $I\cup\{I\}$, d'où $|C(I)|=1+|I|$.

   b) Soit $I=1+\aleph_2^*+\aleph_1+\aleph_0^*+\aleph_\omega$, où $+$ désigne la somme d'ensembles ordonnés et α^* l'ordre inverse sur α, c'est-à-dire, pour $x,y\in\alpha$, on a $x<_{\alpha^*}y$ ssi $x>_\alpha y$. On pose $\Gamma_1=1$, $\Delta_1=\aleph_2^*+\aleph_1+\aleph_0^*+\aleph_\omega$, $\Gamma_2=1+\aleph_2^*+\aleph_1$ et $\Delta_2=\aleph_0^*+\aleph_\omega$.

   Il est clair que $|I|=\aleph_\omega$. Notons que la coinitialité de α^* est égale à $\mathrm{cof}(\alpha)$. De plus, si $\alpha\neq\varnothing$, on a $\mathrm{cof}(\beta+\alpha)=\mathrm{cof}(\alpha)$. En utilisant ces observations, on obtient $\mathrm{cof}(\Gamma_1,\Delta_1)=(\mathrm{cof}(1),\mathrm{cof}(\aleph_2))=(1,\aleph_2)$ ainsi que $\mathrm{cof}(\Gamma_2,\Delta_2)=(\mathrm{cof}(\aleph_0),\mathrm{cof}(\aleph_1))=(\aleph_0,\aleph_1)$. (On a utilisé ici la régularité de 1 et de $\aleph_n$, pour $n\in\omega$).

   c) Nécesairement, on a $\mu\geqslant\kappa+\lambda$, et κ, λ sont deux cardinaux réguliers. Réciproquement, si $\mu=0$, $\kappa=\lambda=0$ est possible. Si $\mu>0$, on voit sans problème que toute paire de cardinaux réguliers κ,λ avec $0<\kappa+\lambda\leqslant\mu$ est possible. En effet, pour μ fini cela se montre à la main, et pour μ infini, si $\kappa=0$ on prend $I=\lambda^*+\mu$, de même $\mu+\kappa$ si $\lambda=0$. Sinon, l'ensemble ordonné $I=\kappa+\lambda^*+\mu$ convient. (Ici, on utilise que $|(|\mu+\nu)=\max\{\mu,\nu\}$ si μ et ν sont deux cardinaux dont au moins un est infini.)

2. a) La suite constante à 0 est minimale dans κ^λ et se trouve dans $\kappa^{<\lambda}$, ce qui donne la coinitialité de $\kappa^{<\lambda}$ dans κ^λ. Soit $a=(a_i)_{i\in\lambda}\in\kappa^\lambda$ donné. Comme κ est un cardinal infini, c'est un ordinal limite, et $a_0+1\in\kappa$. La suite $b=(b_i)_{i\in\lambda}$ définie par $b_0=a_0+1$, $b_i=0$ pour $i>0$ est donc dans $\kappa^{<\lambda}$, et on a $a<b$. Cela montre la cofinalité de $\kappa^{<\lambda}$ dans κ^λ.

   Finalement, on suppose que $a<b<c$ pour $a=(a_i)_{i\in\lambda}, b=(b_i)_{i\in\lambda}, c=(c_i)_{i\in\lambda}\in\kappa^\lambda$. Soit $i\in\lambda$ minimal tel que $a_i\neq b_i$, et $j\in\lambda$ minimal tel que $b_j\neq c_j$. On pose $k:=\max\{i,j\}$, et on définit $d=(d_i)_{i\in\lambda}$ via $d_i:=b_i$ pour $i\leqslant k$, et $d_i:=0$ pour $i>k$. Par définition de l'ordre, on a alors $a<d\leqslant b<c$. Comme $d\in\kappa^{<\lambda}$, on conclut.

   b) Soit $\lambda'=\mathrm{cof}(\lambda)$. Nous allons montrer que si (Γ,Δ) est la coupure induite par $a\in\kappa^\lambda\setminus\kappa^{<\lambda}$ (dans $\kappa^{<\lambda}$), alors $\mathrm{cof}(\Gamma,\Delta)=(\lambda',\lambda')$.

   Pour $i\in\lambda$, on définit $g^i,d^i\in\kappa^{<\lambda}$ comme suit. On pose $g^i_j=d^i_j=a_j$ pour $j<i$, $g^i_i=a_i$, $d^i_i=a_i+1$, et enfin $g^i_j=d^i_j=0$ pour $j>i$. Il est clair que la suite $(g^i)_{i<\lambda}$ est croissante et cofinale dans Γ ; de même, la suite $(d^i)_{i<\lambda}$ est décroissante et co-initiale dans Δ. Soit $f:\lambda'\to\lambda$ une fonction croissante cofinale. Alors la suite $(g^{f(i)})_{i<\lambda'}$ est cofinale dans Γ ; de même, $(d^{f(i)})_{i<\lambda'}$ est co-initiale dans Δ.

   Réciproquement, supposons que $C\subseteq\Gamma$ soit cofinal, avec $|C|=\mu$. On choisit une bijection $h:\mu\to C$, et on définit une application $h':\mu\to\lambda$ comme suit : pour $\alpha<\mu$, $h'(\alpha)$ est le plus petit $i<\lambda$ tel que $h(\alpha)\leqslant g^i$. Un tel i existe car $(g^i)_{i<\lambda}$ est cofinale. De plus, comme $\mathrm{im}(h)=C$ est cofinale dans Γ, il s'en suit que h' est cofinale, d'où $\mu\geqslant\lambda'$. On fait un argument similaire pour Δ, ce qui permet de conclure.

3. a) Soit $\lambda:=\min\{\mu\leqslant\kappa : \kappa^\mu>\kappa\}$. Comme $\kappa^\kappa\geqslant 2^\kappa>\kappa$ par le théorème de Cantor, un tel λ existe. Par le théorème de Hesseberg, on a $|\kappa^n|=\kappa$ pour tout $1\leqslant n<\aleph_0$, et λ est donc un cardinal infini. On considère κ^λ et $\kappa^{<\lambda}$ comme dans la partie 2. Par 2.a, $\kappa^{<\lambda}$ est dense dans κ^λ qui est de cardinal $>\kappa$ par définition de λ. On a $\kappa^\lambda=\bigcup_{\alpha\in\lambda}\kappa^\alpha$, d'où $|\kappa^{<\lambda}|=\sup\{\lambda,|\kappa^\alpha| : \alpha<\lambda\}=\kappa$, par minimalité de λ. On conclut que $\mathrm{Ded}(\kappa)\geqslant\kappa^\lambda>\kappa$, autrement dit que $\mathrm{Ded}(\kappa)\geqslant\kappa^+$.

   b) Si $(I,<)$ avec I fini, et si A est dense dans I, alors $A=I$ nécessairement. De plus, il s'agit d'un bon ordre dans ce cas, et 1.a donne $|I|=|A|<1+|A|=|C(A)|$. On suppose maintenant que I est infini (donc A aussi), et on considère l'application $c:I\to C(A)$ qui à i associe $(\Gamma_{<i},\Delta_{\geqslant i})$, avec $\Gamma_{<i}=\{a\in A : a<i\}$ et $\Delta_{\geqslant i}=\{a\in A : i\leqslant a\}$. Montrons que si $i<j<k$ sont trois éléments distincts de I, on a $c(i)\neq c(k)$. En effet, par densité de A dans I, il existe $a\in A$ tel que $i<a<k$, et donc $a\in\Delta_{\geqslant i}$ et $a\notin\Delta_{\geqslant k}$. Cela montre que pour toute coupure (Γ,Δ) de A, $|c^{-1}(\Delta,\Gamma)|\leqslant 2$. On en déduit que $|C(A)|=2|C(A)|\geqslant|I|$.

   [Notons que c n'est pas nécessairement injective, comme le montre l'exemple suivant : $I=\omega+1+1+\omega^*\supseteq\omega+\omega^*=A$. Alors A est dense dans I, et les deux éléments de $I\setminus A$ induisent la même coupure dans A.]

   c) Soit $A\subseteq I$, avec A dense dans I et $|A|=\kappa$. Par 3.b on a $|I|\leqslant|C(A)|\leqslant 2^\kappa$. La dernière inégalité suit du fait que l'application qui à une coupure (Γ,Δ) associe $\Gamma\in\mathcal{P}(A)$ est injective.

   On a donc bien $\mathrm{Ded}(\kappa)\leqslant 2^\kappa$, et en particulier $\mathrm{Ded}(\kappa)$ existe. (On utilise aussi que le supremum d'une partie non-vide de cardinaux tous $\leqslant 2^\kappa$ est un cardinal $\leqslant 2^\kappa$.)

d) La partie $\mathbb{Q}$ est dense dans $(\mathbb{R},<)$, et donc $\mathrm{Ded}(\aleph_0) \geqslant |(|\mathbb{R}) = 2^{\aleph_0}$. On conclut par la question précédente.

e) Par induction sur ω, on définit une suite de cardinaux infinis $(\kappa_n)_{n\in\omega}$ comme suit : $\kappa_0 := \aleph_0$, et $\kappa_{n+1} := 2^{\kappa_n}$. Le cardinal $\kappa = \sup\{\kappa_n : n \in \omega\}$ est de cofinalité ω, car $n \mapsto \kappa_n$ est une suite cofinale dans κ. Par ailleurs, $\kappa > \aleph_0$, et donc $\kappa = \aleph_\alpha$ pour un ordinal α limite, car κ est singulier. Pour tout $\beta < \alpha$, on a $\aleph_\beta \leqslant \kappa_n$ pour un $n \in \omega$, d'où $2^{\aleph_\beta} \leqslant \kappa_{n+1} < \kappa$. Il s'en suit que $\sup\{\mathrm{Ded}(\aleph_\beta)\} \leqslant \kappa$ (cela utilise la partie 3.c). Par ailleurs, on a $\mathrm{Ded}(\kappa) > \kappa$ par 3.a, ce qui permet de conclure.

Exercice 9 (Qui sont ces charmants messieurs ?) **:**
De gauche à droite :

- Gyula König, celui du théorème qu'on a utilisé à tord et à travers dans ce TD, le père de celui du TD 1 ;
- Robert Solovay, celui de l'exercice 7 ;
- Paul Cohen, le père du Forcing qui a permis, entre autre, de démontrer l'indépendance de (HGC).