Silvain Rideau
Bureau T5
silvain.rideau@ens.fr
www.eleves.ens.fr/home/srideau

TD de Logique 3 (Cardinaux et cofinalité)

10 et 13 octobre 2014

Les exercices qui ne sont pas abordés en cours, seront (certainement) corrigés sur ma page personelle (voir ci-dessus).

Exercice 1 (Cofinalité) **:**

1. Déterminer la cofinalité de ω^2, ω^ω, ω^α, $\alpha+\beta$, $\aleph_{\omega^\alpha}$.
2. Soient κ et λ deux cardinaux infinis, montrer que $\mathrm{cof}(\kappa) \leqslant \lambda$ si et seulement s'il existe une suite $(\kappa_\alpha)_{\alpha<\lambda}$ de cardinaux strictement plus petits que κ telle que $\kappa = \sum_{\alpha<\lambda} \kappa_\alpha$. Attention c'est bien une somme et pas une union...
3. Soient κ un cardinal infini et $\lambda < \mathrm{cof}(\kappa)$, montrer que toute application croissante de κ dans λ est stationnaire (constante à partir d'un certain rang).

Exercice 2 :
Soit X un sous-ensemble non-borné de $\aleph_1$. Montrer que $(X,<)$ est isomorphe à $(\aleph_1,<)$.
Qu'en est-il pour κ cardinal régulier quelconque ?

Exercice 3 :
Soient κ et λ deux cardinaux infinis avec $\kappa \geqslant \lambda$, montrer que l'ensemble des parties de κ de cardinalité $\leqslant \lambda$ a pour cardinalité κ^λ.

Exercice 4 :
Soit $\kappa > \aleph_0$ un cardinal régulier et G un groupe de cardinalité κ. On énumère $G = \{a_i : i < \kappa\}$. Pour $\beta < \kappa$, on note $A_\beta = \{a_i : i < \beta\}$.

1. Montrer que pour tout $\alpha < \kappa$, il exist $\beta < \kappa$ tel que le groupe engendré par A_α soit inclu dans A_β.
2. Montrer que pour tout $\alpha < \kappa$, il existe $\beta \geqslant \alpha$ tel que A_β est un sous-groupe de G.

Exercice 5 (Exponentielle cardinale sous (HGC)) **:**
On rappelle que l'*hypothèse du continu généralisée* (HGC) est l'énoncé : pour tout cardinal infini κ, $2^\kappa = \kappa^+$.

1. Montrer que pour cardinaux κ et λ, on a $\kappa^\lambda \leqslant 2^{\kappa.\lambda}$.
2. Soient κ un cardinal infini et λ un cardinal non nul, montrer que $(\kappa^+)^\lambda = \kappa^+\kappa^\lambda$. (On distinguera les cas $\lambda \geqslant \kappa^+$ et $\lambda \leqslant \kappa$.)
3. Soient n un entier et λ un cardinal non nul, montrer que $\aleph_n^\lambda = \aleph_n 2^\lambda$.
4. On suppose (HGC). Soient κ un cardinal infini et λ un cardinal non nul, montrer que :

$$\kappa^\lambda = \begin{cases} \kappa & \text{si } \lambda < \mathrm{cof}(\kappa) \\ \kappa^+ & \text{si } \mathrm{cof}(\kappa) \leqslant \lambda \leqslant \kappa \\ \lambda^+ & \text{si } \kappa \leqslant \lambda \end{cases}.$$

Exercice 6 (Ensembles clos cofinaux) **:**
Soit $\kappa > \aleph_0$ un cardinal régulier. Un ensemble $C \subseteq \kappa$ est un *club* (closed unbounded) s'il est clos et cofinal, c'est-à-dire s'il est cofinal dans κ et pour tout $A \subset C$, $\sup(A) \in C \cup \{\kappa\}$.
Un ensemble $S \subseteq \kappa$ est dit *stationnaire* s'il intersecte tous les clubs.

1. Soient $\lambda < \kappa$ et $(C_i)_{i<\lambda}$ une famille de clubs, montrer que $\bigcap_{i<\lambda} C_i$ est un club.

2. Soit $(C_i)_{i<\kappa}$ une famille de clubs, montrer que l'intersection diagonale $\triangle_{i<\kappa} C_i := \{\alpha < \kappa : \alpha \in \bigcap_{i<\alpha} C_i\}$ est un club.

3. (Lemme de Fodor) Soit $S \subseteq \kappa$ un ensemble stationnaire et $f : S \to \kappa$ une fonction régressive (c'est-à-dire telle que $f(\alpha) < \alpha$ pour tout $\alpha \in S$). Montrer qu'il existe un ensemble stationnaire $T \subseteq S$ tel que f soit constante sur T.

   (Indication : raisonner par l'absurde.)

Exercice 7 (Théorème de Solovay) **:**
Soit $\kappa > \aleph_0$ un cardinal régulier et soit $S \subseteq \kappa$ un ensemble stationnaire. On veut montrer le théorème de Solovay : S peut s'écrire comme réunion de κ ensembles stationnaires deux-à-deux disjoints.

1. Pour $\lambda < \kappa$ un cardinal, on note $E^\kappa_\lambda = \{\alpha < \kappa : \mathrm{cof}(\alpha) = \lambda\}$. Montrer le théorème de Solovay dans le cas où $S \subseteq E^\kappa_\omega$.

   (Indication : Écrire, pour $\alpha \in S$, $\alpha = \lim_{n<\omega} a^\alpha_n$. Définir à partir de là une fonction régressive et appliquer le Lemme de Fodor.)

2. Montrer le théorème de Solovay dans le cas où $S \subseteq \{\alpha < \kappa : \mathrm{cof}(\alpha) < \alpha\}$.

3. Supposons que S est un ensemble de cardinaux réguliers. Montrer que

$$T = \{\alpha \in S : S \cap \alpha \text{ n'est pas stationnaire dans } \alpha\}$$

   est stationnaire.

   (Indication : Raisonner par l'absurde. Remarquer que si C est un club, l'ensemble $C' \subset C$ des limites de points de C est encore un club.)

4. Montrer le théorème de Solovay dans le cas général.

   (Indication : Se ramener au cas de la question 3. Pour $\alpha \in T$, on peut considérer une suite strictement croissante continue $(a^\alpha_\xi : \xi < \kappa)$ tendant vers α telle que $a^\alpha_\xi \notin S$. Adapter alors la preuve de 1.)

Exercice 8 (Nombre de Dedekind) **:**
Soit $(I, <)$ un ordre total. Voici quelques notions qu'on utilisera dans cet exercice.

- Soient $\Gamma, \Delta \subseteq I$ des parties de I. La paire (Γ, Δ) est une *coupure* de I si $\Gamma \cup \Delta = I$, $\Gamma \cap \Delta = \varnothing$ et $\gamma < \delta$ pour tout $\gamma \in \Gamma$ et tout $\delta \in \Delta$.
- Si $A \subseteq I$ et $i \in I \setminus A$, la coupure induite par i dans $(A, <)$ est donnée par (Γ_i, Δ_i), où $\Gamma_i := \{a \in A : a < i\}$ et $\Delta_i = \{a \in A : i < a\}$.
- La cofinalité d'une coupure (Γ, Δ), notée $\mathrm{cof}(\Gamma, \Delta)$, est la paire de cardinaux (κ, λ) telle que

$$\kappa = \min\{|G| : G \subseteq \Gamma \text{ est cofinal dans } \Gamma\} \text{ et } \lambda = \min\{|D| : D \subseteq \Delta \text{ est coinitial dans } \Delta\}.$$

  (Ici, $D \subseteq \Delta$ est dit *coinitial* dans Δ si pour tout $\delta \in \Delta$ il existe $d \in D$ tel que $d \leqslant \delta$.)
- Une partie $A \subseteq I$ est *dense* dans I si elle est cofinale et coinitale dans I, et si pour tout $i < j < k$ dans I il existe $a \in A$ tel que $i < a < k$.

1. a) Soit $(I, <)$ un bon ordre. Décrire toutes les coupures dans I, et montrer que $|C(I)| = 1 + |I|$, où $C(I)$ dénote l'ensemble des coupures dans I.
   b) Construire un ordre total $(I, <)$ et des coupures (Γ_1, Δ_1) et (Γ_2, Δ_2) dans I tels que $|I| = \aleph_\omega$, $\mathrm{cof}(\Gamma_1, \Delta_1) = (1, \aleph_2)$ et $\mathrm{cof}(\Gamma_2, \Delta_2) = (\aleph_1, \aleph_0)$.
   c) Déterminer les triplets de cardinaux (κ, λ, μ) pour lesquels il existe un ordre total $(I, <)$ et une coupure (Γ, Δ) dans I tels que $|I| = \mu$ et $\mathrm{cof}(\Gamma, \Delta) = (\kappa, \lambda)$.

2. Soient κ et λ deux cardinaux infinis. Sur κ^λ on considère l'ordre défini ainsi : $a = (a_i)_{i<\lambda} < b = (b_i)_{i<\lambda}$ si $a \neq b$ et si $a_{i_0} < b_{i_0}$, où $i_0 = \min\{i \in \lambda : a_i \neq b_i\}$. On observe qu'il s'agit d'un ordre total. Soit $\kappa^{<\lambda} := \{(a_i)_{i<\lambda} \in \kappa^\lambda :$ il existe $\delta < \lambda$ tel que $a_i = 0$ pour tout $i \geqslant \delta\}$.

a) Montrer que $\kappa^{<\lambda}$ est dense dans κ^{λ}.

b) Déterminer les cofinalités possibles d'une coupure induite par un élément $a \in \kappa^{\lambda} \setminus \kappa^{<\lambda}$ dans $\kappa^{<\lambda}$.

3. Pour κ un cardinal infini, on définit le *nombre de Dedekind* de κ, noté $\mathrm{Ded}(\kappa)$, comme

$$\mathrm{Ded}(\kappa) = \sup\{|I| : \langle I, <\rangle \text{ est un ordre total contenant une partie dense de cardinal } \kappa\}.$$

a) Déduire de la partie 2. que pour tout κ infini on a $\mathrm{Ded}(\kappa) \geqslant \kappa^+$.

b) Soit $A \subseteq I$ une partie dense. Montrer l'inégalité suivante :

$$|I| \leqslant |\{(\Gamma, \Delta) : (\Gamma, \Delta) \text{ est une coupure dans } \langle A, <\rangle\}|.$$

c) En déduire que $\mathrm{Ded}(\kappa) \leqslant 2^{\kappa}$ pour tout κ. En particulier, $\mathrm{Ded}(\kappa)$ existe.

d) Montrer que $\mathrm{Ded}(\aleph_0) = 2^{\aleph_0}$.

e) Montrer qu'il existe un ordinal α limite tel que $\mathrm{Ded}(\aleph_\alpha) > \sup_{\beta<\alpha} \mathrm{Ded}(\aleph_\beta)$.

Exercice 9 (Qui sont ces charmants messieurs ?) **:**