Silvain Rideau
Bureau T5
silvain.rideau@ens.fr
www.eleves.ens.fr/home/srideau

# Corrigé du TD de Logique 5

24 et 27 octobre 2014

**Exercice 3** (Groupes pseudo-finis) **:**

1. La théorie $T = T_0 \cup \{\neg\varphi_n : n \in \mathbb{N}\}$ fait l'affaire. De plus, tous les $G_i$ étant des groupes, ils sont tous modèles des énoncés de la théorie des corps qui est donc incluse dans $T_0$, i.e tout modèle de $T_0$ et donc a fortiori ses modèles infinis sont des groupes.

2. Montrons que $\sup\{|G_i|\} = \omega$ est nécessaire et suffisant. En effet si $\sup\{|G_i|\} = n < \omega$, l'énoncé $\varphi_n = \forall x_0 \forall x_n \bigvee_{i<j} x_i = x_j$ est vraie dans tout $G_i$ et est donc dans $T_0$ que ne peut donc avoir de modèle de cardinal plus grand que $n$.

   Réciproquement, si $\sup\{|G_i|\} = \omega$, la théorie $T$ est consistante, i.e. $T_0$ admet un modèle infini. En effet, par compacité, il suffit de considérer $T' \subseteq T$ fini, i.e. $T' \subseteq T_0 \cup \{\neg\varphi_n : n < m\}$. Mais alors tout $G_i$ de cardinal strictement plus grand que $m$ est modèle de $T'$.

3. Par le théorème de compacité, tout énoncé $\varphi$ qui est conséquence de $T$ est conséquence d'une partie finie de $T$ qui est donc incluse dans $T_0 \cup \{\neg\varphi_n : n < m\}$. L'énoncé $\varphi$ est donc vérifié dans tout $G_i$ de cardinal strictement plus grand que $m$. Réciproquement, si $\varphi$ est vrai dans tous les $G_i$de cardinal plus grand qu'un certain $m$, alors la formule $\varphi_m \to \varphi$ est vraie dans tous les $G_i$ et est donc vraie dans tout modèle de $T_0$. Les modèles infinis de $T_0$ étant tous modèles de $\varphi_m$, il s'en suit que $\varphi$ est vraie dans tout modèle de $T$.

**Exercice 4** (Modèles non-standards) **:**

1. Soit $c$ une nouvelle constante. On pose $T^\star = T \cup \{\exists x,\ \bar{n}x = c : n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}\}$. Par le théorème de compacité, la théorie $T^\star$ est consistante si et seulement si tout bout fini de $T$ l'est, i.e. $T \cup \{\exists x,\ \bar{n}x = c : 0 < n < k\}$. Il suffit alors de prendre comme modèle $\mathcal{N}$ où $c$ est interprété par $k!$. Un modèle $\mathcal{M}$ de $T^\star$ est bien un modèle de $T$ contenant un point $c^{\mathcal{M}}$ qui est divisible par tout $\bar{n}$ pour $n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$, en particulier, il est plus grand que tout $\bar{n}$.

2. Si $\mathcal{M} \models \exists x \neg\varphi[x]$ alors $\mathcal{N} \models \exists x \neg\varphi[x]$ et donc il existe $n \in \mathbb{N}$, tel que $\mathcal{N} \models \neg\varphi[\bar{n}]$ et donc $\mathcal{M} \models \neg\varphi[\bar{n}]$. On a montré la contraposée de la question.

3. Soit $\varphi[x]$ tel que $\mathcal{M} \models \varphi[m]$ si et seulement si $m = \bar{n}$ pour un $n \in \mathbb{N}$. En particulier $\mathcal{M} \models \varphi[\bar{n}]$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et donc par la question précédente $\mathcal{M} \models \forall x,\ \varphi[x]$, ce qui est absurde.

**Exercice 5** (Préservation, le retour) **:**

1. Voir le cours sur les diagrammes.

2. Soit $\mathcal{N} \subseteq \mathcal{M} \models T$ et $\varphi = \forall x_1 \forall x_n\ \psi[x_1, \ldots, x_n]$ universelle (où $\psi$ est sans quantificateurs) conséquence de $T$. Comme $\mathcal{M} \models T$, on a aussi $\mathcal{M} \models \varphi$. Pour tout $c_1, \ldots, c_n \in N$, on a alors $\mathcal{M} \models \varphi[c_1, \ldots, c_n]$ et donc $\mathcal{N} \models \varphi[c_1, \ldots, c_n]$.

   Réciproquement soit $\mathcal{N} \models T_\forall$ et soit $T' = \Delta(\mathcal{N}) \cup T$. Soit $T_0 \subseteq T'$ fini. Comme $\Delta(\mathcal{N})$ clos par conjonction finie, on peut supposer $T_0 = \{\varphi[c_{n_1}, \ldots, c_{n_k}]\} \cup T$ où les $c_{n_i}$ n'apparaissent pas dans $T$ et $\mathcal{N} \models \varphi[n_1, \ldots, n_k]$. Si $T_0$ était inconsistante, par un résultat du cours, on aurait $T \models \forall x_1 \ldots \forall x_k\ \neg\varphi[x_1, \ldots, x_k]$ et donc, comme $\mathcal{N} \models T_\forall$, $\mathcal{N} \models \forall x_1 \ldots \forall x_k\ \neg\varphi[x_1, \ldots, x_k]$ et donc $\mathcal{N} \models \neg\varphi[n_1, \ldots, n_k]$, ce qui est absurde.

   Un modèle de $T'$ étant exactement un modèle de $T$ dans lequel se plonge $\mathcal{N}$, on a bien montré le résultat voulu.

3. Comme $T_\forall$ est universelle il est évident que $T_\forall$ (et donc $T$) qui lui est équivalente est stable par sous-structure.

   Réciproquement, comme $T_\forall$ est conséquence de $T$ par définition, il suffit de montrer que $T$ est conséquence de $T_\forall$. Soit $\mathcal{M}$ un modèle de $T_\forall$. Par la question précédente $\mathcal{M}$ se plonge dans $\mathcal{N} \models T$. Mais comme $T$ est stable par sous-structure, $\mathcal{M} \models T$.

4. L'énoncé $\neg\varphi$ est préservé par sous-structure, en effet si $\mathcal{M} \vDash \neg\varphi$ et $\mathcal{N} \subseteq \mathcal{M}$ alors si on a pas $\mathcal{N} \vDash \neg\varphi$, il s'en suit que $\mathcal{N} \vDash \varphi$ et donc, par hypothèse sur $\varphi$, $\mathcal{M} \vDash \varphi$, ce qui est absurde. Par la question précédente (et le théorème de compacité), il existe une formule universelle $\psi$ qui soit équivalente à $\neg\varphi$ et donc $\neg\psi$ qui est existentielle est équivalente à $\varphi$.

   On pourrait aussi démontrer l'équivalent de la question précédente (i.e. avec une théorie plutôt qu'une formule) dans le cas existentiel, mais ce n'est pas une conséquence immédiate de la question précédente et nécessite sa propre démonstration (utilisant le même genre de techniques que Lowenheim-Skolem descendant).

**Exercice 6** (Types et nombres de modèles dénombrables) **:**

1. Soient $c_1, \dots, c_n$ de nouvelles constantes et considérons $T_p$ la théorie $T \cup p[\overline{c}]$. L'ensemble de formules $p$ est un type si et seulement si $T_p$ est consistante, et donc par compacité, si et seulement si toute partie fini de $T_p$ est consistant. Mais toute partie fini de $T_p$ est inclu dans $T_{p_0}$ avec $p_0 \subseteq p$ fini, i.e. $T_p$ est finiment consistante si et seulement si toute partie finie de $p$ est consistante avec $T$.

2. Soit $p_0 \subseteq p$ fini et posons $\varphi_{p_0} = \bigwedge_{\varphi \in p_0} \varphi$. Comme $T$ est complète elle a pour conséquence soit $\exists \overline{x}\ \varphi_{p_0}[\overline{x}]$ soit $\forall \overline{x}\ \neg\varphi_{p_0}[\overline{x}]$, mais ce dernier cas contredit le fait que $T_{p_0}$ soit consistante.

   Montrons maintenant que $\mathcal{D}(\mathcal{M}) \cup p[\overline{c}]$ est consistante. En effet une partie finie de cette théorie est de la forme $\mathcal{D}(\mathcal{M}) \cup p_0[\overline{c}]$ pour $p_0$ fini. Mais comme $\exists \overline{x}\varphi_{p_0}[\overline{x}]$ une conséquence de $T$ est donc est vraie dans $\mathcal{M}$, on peut trouver des interprétation pour les $c_i$ dans $\mathcal{M}$ telle que la nouvelle structure soit un modèle de $\mathcal{D}(\mathcal{M}) \cup p_0[\overline{c}]$. Par compacité cette théorie est consistante et par Lowenheim-Skolem, on peut en trouver un modèle de même cardinal que $\mathcal{M}$.

3. Comme $\varphi$ est consistante avec $T$ et que $T$ et complète, comme on l'a vu, $\varphi$ est réalisée dans tout modèle de $T$. Soit alors $\mathcal{M} \vDash T$ et $\overline{a}$ tel que $\mathcal{M} \vDash \varphi[\overline{a}]$. Comme $T \vDash \forall \overline{x}\varphi[\overline{x}] \to \psi[\overline{x}]$, pour tout $\psi \in p$, on a bien $\mathcal{M} \vDash \psi[\overline{a}]]$ pour tout $\psi \in p$, i.e. $\overline{a}$ réalise $p$.

   Le deuxième cas est similaire. On pose $c$ tel que $\mathcal{M} \vDash \varphi[\overline{a}, c]$ et on conclut de la même manière.

4. L'ensemble de formules $\mathrm{tp}(\overline{c})$ est bien évidemment consistant avec $T$ vu qu'il est réalisé dans $\mathcal{M}$.

5. On pose $M = \{m_i : i \in \mathbb{N}\}$ et $n = \{n_i : i \in \mathbb{N}\}$ et on construit par récurence une famille cohérente de $f_i$ de domaine $\overline{c}$ fini tel que $\mathrm{tp}(\overline{c}) = \mathrm{tp}(f_i(\overline{c}))$ et tels le domaine de $f_{2i}$ contient $m_i$ et l'image de $f_{2i+1}$ contient $n_i$. On pose $f_{-1}$ de domaine vide.

   Soit $\overline{c}$ le domaine de $f_{2i-1}$. Si $m_i \in \overline{c}$ il n'y a rien à faire. Sinon, soit $\varphi$ qui isole $\mathrm{tp}(\overline{c}m_i)$, comme $\exists y\varphi[\overline{x}, y] \in \mathrm{tp}(\overline{c})$, on a aussi $\mathbb{N} \vDash \exists y\varphi[f_{2i-1}(\overline{c}), y]$. Par la question 3, il existe $b \in N$ tel que $\mathrm{tp}(\overline{c}m_i) = \mathrm{tp}(f_{2i-1}(\overline{c})b)$ (dans le cas $i = 0$ on applique simplement la première partie de la question). On pose alors $f_{2i}(c_j) = f_{2i-1}(c_j)$ et $f_{2i}(m_i) = b$. La construction de $f_{2i+1}$ est symétrique.

   Il suffit alors de considérer $f = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} f_i$.

6. Supposons que $T$ ait un type $p$ non isolé. Par le résultat admis il existe $\mathcal{M} \vDash T$ dénombrable tel que $p$ ne soit pas réalisé dans $\mathcal{M}$. Soit alors $\mathcal{N}$ une extension élémentaire dénombrable dans laquelle $p$ est réalisée (qui existe par la question 2). Il est alors impossible que $\mathcal{N}$ et $\mathcal{M}$ soit isomorphes car une réalisation de $p$ dans $\mathcal{N}$ serait envoyée sur une réalisation de $p$ dans $\mathcal{M}$.

   La question précédente nous donne exactement la réciproque.

7. Soit $p$ un type de $T$. Soit $\overline{b} \in \mathcal{N} \vDash T$ qui réalise $p$. Comme $T$ est complète, par l'exercice 3, $\mathcal{M}$ et $\mathcal{N}$ se plongent tous deux élémentairement dans $\mathcal{O}$. Comme le plongement est élémentaire, l'image d'une réalisation de $p$ dans $\mathcal{N}$ est une réalisation de $p$ dans $\mathcal{O} \vDash \mathcal{D}(\overline{c})$. Il s'en suit donc que $p$ est aussi un type de $\mathcal{D}(\overline{c})$.

   Si $p$ est isolé dans $\mathcal{D}(\overline{c})$, il existe $\varphi[\overline{c}, \overline{y}]$ tel que pour tout $\theta \in p$, $\mathcal{D}(\overline{c}) \vdash \forall \overline{y}\ \varphi[\overline{c}, \overline{y}] \to \theta[\overline{y}]$. Par compacité il existe $\psi[\overline{c}]$ telle que $T \vdash \forall \overline{y}(\varphi[\overline{c}, \overline{y}] \wedge \psi[\overline{c}]) \to \theta[\overline{y}]$ et donc $T \vdash \forall \overline{x}\forall \overline{y}(\varphi[\overline{x}, \overline{y}] \wedge \psi[\overline{x}]) \to \theta[\overline{y}]$ d'où $T \vdash \forall \overline{y}(\exists \overline{x}\varphi[\overline{x}, \overline{y}] \wedge \psi[\overline{x}]) \to \theta[\overline{y}]$, ce qui implique que $p$ est isolé dans $T$.

   Par la question précédente, on a donc montré que si $\mathcal{D}(\overline{c})$ est $\aleph_0$-catégorique, $T$ l'est aussi.

8. Soit $T$ qui n'est pas $\aleph_0$-catégorique. Il existe donc une type non isolé $p$ et des modèles dénombrables $\mathcal{M}$ et $\mathcal{N}$ de $T$ tels que dans $\mathcal{M}$ $p$ ne soit pas réalisé mais il est réalisé dans $\mathcal{N}$. Soit $\overline{c}$ une réalisation de $p$ dans $\mathcal{N}$. Quitte à grossir $p$, on peut supposer $p = \mathrm{tp}(\overline{c})$ (il ne sera toujours pas réalisé dans $\mathcal{M}$).

Par la question précédente, $\mathcal{D}(\bar{c})$ n'est pas $\aleph_0$-catégorique non plus. Il existe donc un type $q[\bar{c},\bar{y}]$ de $\mathcal{D}(\bar{c})$ qui soit non isolé dans $\mathcal{D}(\bar{c})$. Quitte à changer $\mathcal{N}$ on peut supposer que $q[\bar{c},\bar{y}]$ n'est pas réalisé dans $\mathcal{N}$. Soit alors $\mathcal{N} \preccurlyeq \mathcal{O}$ tel que pour tout $\bar{c}' \in N$ qui réalise $p$, $q[\overline{c'},\bar{y}]$ est réalisé dans $\mathcal{O}$ (un tel $\mathcal{O}$ existe par compacité car pour toute partie finie $\{\psi_i\}$ de $q$, $\exists\bar{y}\ \bigwedge_i \psi_i[\bar{c},\bar{y}]$ is in $\mathcal{D}(\bar{c})$ et donc $\exists\bar{y}\ \bigwedge_i \psi_i[\bar{c},\bar{y}] \in p[\bar{x}]$). De plus, on peut prendre $\mathcal{O}$ dénombrable car, comme $N$ est dénombrable, il y a donc au plus un nombre dénombrable de tels $\bar{c}'$). Quitte à itérer et à prendre l'union de la chaîne ainsi construite, on peut supposer que $\mathcal{O}$ vérifie que pour tout $\bar{c}' \in O$ qui réalise $p$, $q[\overline{c'},\bar{y}]$ est réalisé dans $\mathcal{O}$.

Comme $p$ est réalisé dans $\mathcal{N}$ et $\mathcal{O}$ et n'est pas réalisé dans $\mathcal{M}$, il est évident que $\mathcal{M} \not\cong \mathcal{N}$ et $\mathcal{M} \not\cong \mathcal{O}$. Enfin si $f$ est un isomorphisme entre $\mathcal{N}$ et $\mathcal{O}$, $f(\bar{c})$ est une réalisation de $p$ dans $\mathcal{O}$ et donc il existe $\bar{b}$ qui réalise $q[f(\bar{c}),\bar{y}]$, mais alors $f^{-1}(\bar{b})$ réalise $q[\bar{c},\bar{y}]$ dans $\mathcal{N}$, ce qui est absurde.

**Exercice 7** (Qui sont ces charmants messieurs ?) **:**
De gauche à droite :

- Kurt Gödel, à qui l'on doit le théorème de complétude (et plus tard les théorèmes d'incomplétudes...) ;
- Leon Henkin qui a donné son nom aux témoins de Henkin qui apparaissent (anonymement) dans la preuve du théorème de complétude ;
- Aristote, des les écrits duquel on trouve énoncé certains principes de la logique propositionnelle, donc le Modus Ponens (enfin lui il dit ça en grec).