Silvain Rideau
Bureau T5

silvain.rideau@ens.fr
www.eleves.ens.fr/home/srideau

TD de Logique 6

7 et 10 novembre 2014

Les exercices qui ne sont pas abordés en cours, seront (certainement) corrigés sur ma page personelle (voir ci-dessus).

Exercice 1 :
Soient $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{N} \subseteq \mathcal{O}$, est-il vrai que :

1. Si $\mathcal{M} \preccurlyeq \mathcal{N}$ et $\mathcal{N} \preccurlyeq \mathcal{O}$, alors $\mathcal{M} \preccurlyeq \mathcal{O}$.
2. Si $\mathcal{M} \preccurlyeq \mathcal{O}$ et $\mathcal{N} \preccurlyeq \mathcal{O}$, alors $\mathcal{M} \preccurlyeq \mathcal{N}$.
3. Si $\mathcal{M} \preccurlyeq \mathcal{O}$ et $\mathcal{M} \preccurlyeq \mathcal{N}$, alors $\mathcal{N} \preccurlyeq \mathcal{O}$.

Exercice 2 (Critère de Vaught) **:**
Soit T une théorie dans un langage $\mathcal{L}$ qui n'admet que des modèles infinis et soit κ un cardinal infini $\geqslant |\mathcal{L}|$. On dit que T est κ-catégorique si elle admet un unique modèle de taille κ, à isomorphisme près.
Montrer que si T est κ-catégorique, alors elle est complète.

Exercice 3 (Espace vectoriels) **:**
Soit K un corps. On considère le langage $\mathcal{L} = \{0, +\} \cup \{\lambda_x : x \in K\}$, où 0 est un symbole de constante, $+$ un symbole de fonction binaire et λ_x un symbole de fonction unaire pour tout $x \in K$.
Un K-espace vectoriel est naturellement une $\mathcal{L}$-structure $\mathcal{V}$ ($+$ est interprété comme l'addition, 0 comme le vecteur nul et λ_x comme la mutiplication scalaire par x).

1. Montrer que l'on peut axiomatiser la classe des K-espaces vectoriels infinis dans $\mathcal{L}$. Soit T la théorie ainsi obtenue.
2. Soit $\mathcal{V} \vDash T$. Décrire les sous-structures de $\mathcal{V}$.
3. Montrer que T est κ-catégorique pour tout κ infini avec $\kappa > |K|$. En déduire que T est complète.
4. Donner une axiomatisation de $\mathrm{Th}(\mathcal{Q})$ où $\mathcal{Q} = (\mathbb{Q}, 0, +)$.
5. Montrer que si $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{U}$ sont deux K-espaces vectoriels infinis, que $\dim(\mathcal{V}) < \dim(\mathcal{U})$ et que $\mathcal{U}$ est de dimension infinie strictement plus grande que $|K|$, alors $\mathcal{V} \preccurlyeq \mathcal{U}$.
6. Montrer que c'est toujours le cas si on retire les hypothèses sur la dimension (mais qu'ils sont toujours infinis).

Exercice 4 (Théorème d'union de chaîne de Tarski) **:**
Soit $(I, <)$ un ensemble ordonné filtrant, c'est à dire un ensemble ordonné tel que pour tout i et $j \in I$, il existe $k \in I$ tel que $i \leqslant k$ et $j \leqslant k$ (par exemple un ordre total). Pour tout $i \in I$, soit M_i une $\mathcal{L}$-structure et supposons que pour tout $i \leqslant j$, M_i est une sous structure de M_j.

1. Montrer qu'on peut munir $M = \bigcup_{i \in I} M_i$ d'une $\mathcal{L}$-structure telle que que pour tout i, M_i soit une sous-structure de M.
2. Supposons que pour tout $i \leqslant j$, $M_i \preccurlyeq M_j$. Montrer que pour tout i, $M_i \preccurlyeq M$.

Exercice 5 (Théorème de consistance de Robinson) **:**
Soient $\mathcal{L}_1$ et $\mathcal{L}_2$ deux langages, T_1 une $\mathcal{L}_1$-théorie et T_2 une $\mathcal{L}_2$-théorie. On note $\mathcal{L} = \mathcal{L}_1 \cap \mathcal{L}_2$ et $T = T_1 \cap T_2$. On suppose que T_1 et T_2 consistantes et T complète (comme $\mathcal{L}$-théorie).

1. Soit $M \vDash T$, montrer qu'il existe $A \vDash T_1$ tel que $M \preccurlyeq A|_{\mathcal{L}}$.
2. Soient $A \vDash T_1$ et $M \vDash T$ tels que $A|_{\mathcal{L}} \preccurlyeq M$. Montrer qu'il existe B tel que $A \preccurlyeq B$ et $M \preccurlyeq B|_{\mathcal{L}}$.

3. Montrer que $T_1 \cup T_2$ est consistante.

Exercice 6 (La préservation contre-attaque) **:**
Soit T une théorie dans un langage $\mathcal{L}$. On note $T_\forall$ la théorie universelle de T, c'est-à-dire l'ensemble des formules $\varphi = (\forall x_1, .., x_n)\varphi_0(x_1, .., x_n)$ où φ_0 est sans quantificateurs, qui sont conséquence de T.

1. (Rappel du Td précédent) Soient T et T' des théories sur un même langage $\mathcal{L}$. Montrer l'équivalence entre :
   - $T'_\forall \subseteq T_\forall$
   - Tout modèle de T se plonge dans un modèle de T'.
2. Soit $\mathcal{L} = \{<\}$ et soient T, T' deux $\mathcal{L}$-théories consistantes contenant la théorie des ordres stricts totaux infinis. Montrer que $T_\forall = T'_\forall$.
3. Soit T = ACF (théorie des corps algébriquement clos) dans le language $\{+, -, 0, \times, 1\}$. Décrire $T_\forall$.

Exercice 7 (Relation d'équivalence) **:**
On travaille dans le langage $\mathcal{L} = \{E\}$ où E est une relation binaire. On considère la théorie T qui dit que E est une relation d'équivalence, qu'il y a une infinité de classes d'équivalence, et que toutes ces classes sont infinies.

1. Vérifier que T est bien définie (i.e., les propriétés indiquées sont exprimables au premier ordre).
2. Montrer que deux modèles dénombrables de T sont isomorphes. En déduire que T est complète.
3. Combien T admet-elle de modèles de cardinalité $\aleph_1$ (à isomorphisme près) ?

Exercice 8 (λ-modèles) **:**
Soit T une théorie. On appelle λ-modèle de T un modèle $\mathcal{M}$ de T de cardinal λ tel que pour toute formule $\varphi[x_1, \ldots, x_n]$, $\{c_1, \ldots, c_n \in M : \mathcal{M} \models \varphi[c_1, \ldots, c_n]\}$ est de cardinal λ ou fini.

1. Montrer que toute théorie T qui admet des modèles infinis a des λ-modèles pour tout $\lambda \geqslant \max\{\aleph_0, |\mathcal{L}|\}$. En particulier, montrer que si $\mathcal{M}$ est de cardinal $\lambda \geqslant \max\{\aleph_0, |\mathcal{L}|\}$, il existe une extension élémentaire de $\mathcal{M}$ qui soit un λ-modèle.
2. Supposons que tous les λ-modèles de T soient isomorphes et que T n'ait que des modèles infinis, montrer que T est complète.
3. Supposons que T est λ-catégorique, montrer que tout modèle de T de cardinal λ est un λ-modèle.

Exercice 9 (Qui sont ces charmants messieurs ?) **:**