Silvain Rideau
Bureau T5

silvain.rideau@ens.fr
www.eleves.ens.fr/home/srideau

TD de Logique 7 (Élimination des quantificateurs)

13 et 17 novembre 2014

Les exercices qui ne sont pas abordés en cours, seront (certainement) corrigés sur ma page personelle (voir ci-dessus).

Exercice 1 (Ordres linéaires denses) **:**
Soit T la théorie des ordres totaux denses sans extrémité, i.e. sans plus petit élément ni plus grand élément dans le langage $\mathcal{L} = \{<\}$.

1. Montrer que T élimine les quantificateurs.
2. Montrer que T est $\aleph_0$-catégorique.
3. Montrer que T est complète.
4. Montrer que $(\mathbb{Q}, <) \preccurlyeq (\mathbb{R}, <)$.
5. Soit $\mathcal{L}_1 = \mathcal{L} \cup \{c_i : i \in \mathbb{N}\}$ et $T_1 = T \cup \{c_i < c_j : i < j\}$. Montrer que T_1 élimine les quantificateurs, est complète et a exactement trois modèles dénombrables.
6. Soit T' la théorie des ordres totaux denses avec un plus grand élément (mais pas de plus petit), élimine-t-elle les quantificateurs ? Si ce n'est pas le cas, pouvez-vous trouver un langage dans lequel on aura élimination des quantificateurs. Même question pour les ordre linéaires denses avec plus petit élément (mais pas de plus grand) et ceux avec plus petit et plus grand élément.

Exercice 2 (Groupes abéliens ordonnés divisibles) **:**
Soit $\mathcal{L} = \{0, +, -, <\}$ où $-$ est une fonction unaire. Un groupe ordonné est un groupe muni d'un ordre total tel que pour tout x, y, z, $x < y$ implique $x + z < y + z$ et $z + x < z + y$. Un groupe G est dit divisible si pour tout $x \in G$ et $n \in \mathbb{N}^\star$, il existe y tel que $n \cdot y = x$.

1. Montrer qu'on peut axiomatiser la théorie des groupes abéliens divisibles ordonnés non nuls dans le langage $\mathcal{L}$, on la notera T.
2. Montrer que si G est un groupe ordonné, il est sans torsion, i.e. $n \cdot x = 0$ implique $n = 0$ ou $x = 0$.
3. Montrer qu'un groupe divisible sans torsion peut être muni d'une unique structure de $\mathbb{Q}$-espace vectoriel pour la même addition.
4. Soit A un sous-groupe de G où G est un groupe abélien divisible. On appelle clôture divisible de A, notée $\mathrm{Div}(A)$, l'ensemble $\{y \in G : \exists n \in \mathbb{N} \setminus \{0\},\ n \cdot y \in A\}$. Montrer que $\mathrm{Div}(A)$ est un groupe divisible.
5. Soit H un autre groupe abélien divisible et $f : A \to H$ un $\mathcal{L}$-plongement, montrer que f s'étend uniquement à $\mathrm{Div}(A)$ en temps que plongement de groupe ordonné.
6. Montrer que l'ordre sur G est dense sans extrémités.
7. Montrer que T élimine les quantificateurs et que T est complète.
8. Montrer que tout ensemble définissable inclus dans G (en une seule variable donc) est une union de points et d'intervalles.
9. Soit $\varphi[x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_n]$ une formule. On suppose que $\{x_1, \ldots x_n : G \models \varphi[x_1, \ldots, x_m, g_1, \ldots, g_n]\}$ est non vide et que les g_i ne sont pas tous nuls, montrer qu'il existe $h_1, \ldots, h_m$ dans cet ensemble qui soit définissable sur $g_1, \ldots, g_n$ (i.e. le singleton $\{h_1, \ldots, h_m\} \subset G^m$ est défini par une formule à paramètres (exclusivement) parmi $g_1, \ldots, g_n$).
10. En déduire que pour toute $\mathcal{L}$-formule $\varphi[x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_n]$ (qui implique que les y_i sont non tous nuls) il existe une fonction définissable $f : G^n \to G^m$ telle que si $\{x_1, \ldots x_n : G \models \varphi[x_1, \ldots, x_m, g_1, \ldots, g_n]\}$ est non vide, alors $f(g_1, \ldots, g_n)$ appartient à cet ensemble.

Exercice 3 (Graphe aléatoire) **:**
Soient $\mathcal{M}$ et $\mathcal{N}$ deux $\mathcal{L}$-structures. Un *isomorphisme partiel* de $\mathcal{M}$ dans $\mathcal{N}$ est un plongement d'une sous-structure $A \subseteq M$ (son domaine) dans $\mathcal{N}$. Soit K un ensemble d'isomorphismes partiels de $\mathcal{M}$ dans $\mathcal{N}$. On dit que K a la *propriété du va et vient* si :

- K est non vide.
- Pour tout $f \in K$ et tout $a \in M$ il existe $g \in K$ qui étend f et dont le domaine contient a.
- Pour tout $f \in K$ et tout $b \in N$ il existe $g \in K$ qui étend f et dont l'image contient b.

On appelle *graphe (non orienté)* un ensemble de points appelés *sommets* munis d'une relation binaire R qui est antiréflexive, c'est-à-dire pour tout sommet s, on n'a pas sRs et symétrique, c'est-à-dire pour tous sommets s et t on a sRt si et seulement si tRs. Quand deux sommets sont en relation par R, on dit qu'ils sont reliés par une *arête*. Un graphe $\mathcal{G} = (G, R^{\mathcal{G}})$ est dit *aléatoire* si pour tous ensembles finis de sommets S_1 et S_2 disjoints, il existe $s \in G$ qui soit relié à tous les points de S_1 et à aucun point de S_2.

1. Montrer que les graphes aléatoires sont axiomatisables au premier ordre dans le langage $\{R\}$ (on notera T leur théorie).
2. Montrer que si $\mathcal{G}$ est un graphe au plus dénombrable il existe un graphe au plus dénombrable $\mathcal{G}' \supseteq \mathcal{G}$ tel que pour toutes parties finies S_1 et S_2 disjointes de G, il existe $s \in G'$ qui soit relié à tous les points de S_1 et à aucun point de S_2. En déduire que T est consistante et admet des modèles dénombrables.
3. Soient $\mathcal{G}$ et $\mathcal{H}$ deux graphes aléatoires, montrer que l'ensemble des isomorphismes partiels de domaine fini de $\mathcal{G}$ dans $\mathcal{H}$ a la propriété du va et vient.
4. En déduire que T a l'élimination des quanteurs.
5. En déduire aussi que T est $\aleph_0$-catégorique : si $\mathcal{M}$ et $\mathcal{N}$ sont deux modèles dénombrables de T, alors $\mathcal{M} \cong \mathcal{N}$.
6. Montrer que T est complète.
7. Soit $\mathcal{G} \models T$. Montrer qu'il existe une extension élémentaire $\mathcal{H} \preccurlyeq \mathcal{G}$ satisfaisant aux propriétés suivantes :
   a) pour toute partie $P \subseteq G$ il existe $h_P \in H$ tel que $\{g \in G : \mathcal{H} \models h_P R g\} = P$;
   b) $|(|H) = 2^{|(|G)}$.
8. Soit $\mathcal{G} \models T$, montrer que tout graphe fini se plonge dans $\mathcal{G}$.

Exercice 4 (Ordres discrets) **:**
Dans cet exercice, on veut étudier la théorie de $(\mathbb{Z}, <)$.

1. Soit $\mathcal{L} = \{<\}$. Montrer que la $\mathcal{L}$-théorie de $\mathbb{Z}$ n'élimine pas les quantificateurs.
2. Soit $\mathcal{L}^\star = \mathcal{L} \cup \{s\}$. Axiomatiser la théorie $T^\star$ des ordres totaux discrets sans extrémités dans lesquels s est interprété par la fonction successeur.
3. Montrer que $T^\star$ élimine les quantificateurs.
4. Montrer que $T^\star$ est complète, en déduire que la $\mathcal{L}$-théorie T des ordres totaux discrets sans extrémités est complète.

Exercice 5 (Théorème d'Ax) **:**
On veut montrer le résultat suivant : Toute fonction injective polynomiale $f : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ est surjective.

1. Soit T la théorie (dans le langage des anneaux) des énoncés qui sont vrais dans tout $\overline{\mathbb{F}_p}$ pour p premier assez grand. Montrer que T est exactement ACF_0 (à clôture déductive près).‘
2. En déduire qu'un énoncé φ du langage des anneaux est vrai dans $\mathbb{C}$ si et seulement s'il est vrai dans tout $\overline{\mathbb{F}_p}$ pour p assez grand.
3. Montrer que la propriété qu'on veut montrer est vraie pour tout $\mathbb{F}_{p^k}$ et donc pour $\overline{\mathbb{F}_p}$.
4. Conclure.