Silvain Rideau
Bureau T5

silvain.rideau@ens.fr
www.eleves.ens.fr/home/srideau

TD de Logique 10

5 et 8 décembre 2014

Les exercices qui ne sont pas abordés en cours, seront (certainement) corrigés sur ma page personelle (voir ci-dessus).

On va admettre dans ce Td qu'il existe des ensembles récursivement énumérables non récursifs.

Exercice 1 :
Montrer que tout ensemble récursivement énumérable infini contient un ensemble récursif infini.

Exercice 2 (Séparabilité) **:**
Soient A et $B \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$ tels que $A \cap B = \varnothing$, on dit que A et B sont récursivement séparables s'il existe un ensemble D récursif tel que $A \subseteq D$ et $B \cap D = \varnothing$.

1. Montrer qu'il existe des ensembles récursivement énumérables disjoints ne sont pas récursivement séparables. [Indication : Considérer $A = \{i : \varphi_i(i) \text{ est défini et vaut } 0\}$ et $B = \{i : \varphi_i(i) \text{ est défini et vaut } 1\}$.]
2. Montrer que, par contre, tous les ensembles disjoints de complémentaire récursivement énumérable sont récursivement séparables.

Exercice 3 :

1. Soit $f \in \mathcal{F}^1$ une fonction totale récursive dont l'image est infinie. Montrer qu'il existe g totale récursive injective telle que $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Im}(g)$.
2. En déduire qu'il existe des fonctions récursives injectives donc l'image n'est pas récursive.
3. Soit f totale récursive injective, $A = \mathrm{Im}(f)$ et $B = \{x : \exists y > x\, f(y) < f(x)\}$.
   Montrer que B est récursivment énumérable de complémentaire infini.
4. On suppose qu'il existe C récursivement énumérable infini disjoint de B, montrer que A est récursif.
5. En déduire qu'il existe un ensemble B récursivement énumérable qui :
   a) Pour tout A récursivement énumérable infini, $A \cap B \neq \varnothing$,
   b) Le complémentaire de B est infini.

Exercice 4 (Fonction récursives partielles et extension) **:**

1. Soit A une partie récursivement énumérable de $\mathbb{N}^k$, soit f une fonction récursive dont A est le domaine et i l'indice d'une machine qui calcule f. Montrer que si la fonction T_i qui a x associe le temps de calcul de la machine i sur l'entrée peut être étendue à tout $\mathbb{N}^k$ de manière récursive, alors A est récursif.
2. En déduire qu'il existe des fonctions récursives partielles dans $\mathcal{F}^k$ qui ne peuvent pas être étendues à tout $\mathbb{N}^k$.

Exercice 5 (Modèles de l'arithmétique faible) **:**
Soit X un ensemble à au moins deux éléments et f une fonction de $X \times X$ dans X, on considère la $\mathcal{L}_{\mathrm{ar}}$-structure $\mathcal{M}$ suivante :

- $M = \mathbb{N} \sqcup (X \times \mathbb{Z})$,
- dans $\mathbb{N}$ l'interprétation des symboles est ususelle,
- si $a = (x, i)$, $S(a) = (x, i + 1)$,
- si $a = (x, i)$ et $n \in \mathbb{N}$, $a + n = n + a = (x, i + n)$,

- si $a = (x,i)$ et $b = (y,j)$, $a + b = (x, i + j)$,
- si $a = (x,i)$ et $n \in \mathbb{N}^\star$, $a \times n = n \times a = (x, i \times n)$,
- si $a = (x,i)$, $a \times 0 = 0 \times a = (x, 0)$,
- si $a = (x,i)$ et $b = (y,j)$, $a \times b = (f(x,y), i \times j)$.

1. Montrer que $\mathcal{M}$ est un modèle de $\mathcal{P}_0$ (où l'ordre est défini par «$\exists z\, z + x = y \wedge x \neq y$»).
2. Montrer que l'addition n'est pas commutative.
3. Montrer la multiplication n'est necessairement ni commutative ni associative.
4. Montrer que $<$ n'est pas une relation d'ordre.
5. Constuire un modèle de $\mathcal{P}_0$ dans lequel l'addition n'est pas associative.

Exercice 6 (Théorème de Tennenbaum) **:**
Le but de cet exercice est de montrer qu'il n'existe pas de modèle récursif non-standard de l'arithmétique de Peano. On raisonne par l'absurde en supposant qu'il existe des fonctions récursives $\oplus(x,y)$ et $\otimes(x,y)$ telles que $\mathcal{M} := (\mathbb{N}; \oplus, \otimes)$ soit un modèle non standard des axiomes de Péano.
Soient A et $B \subset \mathbb{N}$ récursivement énumérables non récursivement séparables (il n'existe pas de D récursif tel que $A \subset D$ et $B \cap D = \varnothing$).
On rappelle qu'il existe un unique plongement $i : \mathbb{N} \to \mathcal{M}$ dont l'image est un segment initial de $\mathcal{M}$. Cette image est appelée la partie standard de $\mathcal{M}$.

1. Justifier qu'il existe $\mathbf{A}(x)$ une formule Σ_1 qui définit A dans $\mathbb{N}$. Montrer qu'il existe une formule $\widetilde{A}$ à paramètres dans M telle que, si on note $A^* = \widetilde{A}(\mathcal{M}) \cap i(\mathbb{N})$ la partie standard de $\widetilde{A}(\mathcal{M})$, alors $i(A) \subseteq A^*$ et $i(B) \cap A^* = \varnothing$.
2. On désigne par p_n le $n$ième nombre premier. Montrer qu'il existe $c \in \mathfrak{M}$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, c est divisible par $\underline{p_n}$ si et seulement si $\underline{n} \in A^*$.
3. En déduire un algorithme pour calculer A^*. Conclure.
4. Justifier que $\mathfrak{M} \models$ «$i(p_n)$ est le $\underline{n}$ième nombre premier».
5. Montrer qu'il suffit de supposer que $\oplus$ est récursif pour obtenir une contradiction.