Silvain Rideau
Bureau T5
silvain.rideau@ens.fr
www.eleves.ens.fr/home/srideau

Corrigé du TD de Logique 11

2 et 15 décembre 2014

Exercice 3 (Fonctions prouvablement totales dans $\mathcal{P}$) **:**

1. Si $a = \#F[x_0,x_1]$, on note $s(a,n,m) = \#F[\underline{n},\underline{m}]$ (on demande de plus que cette fonction vaille $\#$«$\forall x\, x = x$» si a n'est pas le code d'une telle formule), on a vu dans le cours que c'est une fonction récursive. On pose alors $k(a,n) = \mu t\,(g(a,n,\pi_1^2(t)),\pi_2^2(t)) \in \mathfrak{Dem}_{\mathcal{P}}$ qui est bien récursive et on a $h(a,n) = \pi_1^2(k(a,n))$.

2. Comme la fonction q qui a $\#F[x_0,x_1]$ associe le code de $\forall x_0 \exists x_1 F[x_0,x_1]$ est récrusive primitive, et que l'ensemble $\mathfrak{Dem}_{\mathcal{P}}$ est aussi récursif, il s'en suit que g est définie par cas de façon récursive et est donc elle aussi récursive.

3. Soit f une fonction récursive, elle est donc représentée par une formule Σ_1 $F[x_0,x_1]$. Si elle est prouvablement totale dans $\mathcal{P}$, comme $\mathbb{N} \models \mathcal{P}$, f est totale. En particulier, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe m tel que $\mathbb{N} \models F[\underline{n},\underline{m}]$ et donc, comme F est Σ_1, $\mathcal{P}_0 \vdash F[\underline{n},\underline{m}]$ et donc, a fortiori, $\mathcal{P} \vdash F[\underline{n},\underline{m}]$. Il s'en suit donc que, si $a = \#F[x_0,x_1]$, $\mathcal{P} \vdash F[\underline{n},\underline{h(a,n)}]$, et donc, comme F représente f, $h(a,n) = f(n)$. Soit alors b une preuve de $\forall x_0 \exists x_1\, F[x_0,x_1]$ dans $\mathcal{P}$. On a donc $g(a,b,n) = f(n)$.

   L'argument diagonal classique va permettre de conclure. Soit $f(x) = g(\pi_1^2(x),\pi_2^2(x),x) + 1$. Cette fonction est récursive totale et soit donc a le code d'une formule qui représente f. Si elle est prouvablement totale dans $\mathcal{P}$, il existe b tel que $\lambda x\, g(a,b,x) = f$. Posons $c = \alpha_2(a,b)$, on a alors $f(c) = g(a,b,c) + 1 = f(c) + 1$, ce qui est absurde.

Exercice 4 (Preuve de Chaitin du 1er théorème d'incomplétude) **:**

1. Soit $C^1[i,t,x,y]$ une formule Σ_1 qui est vraie (dans $\mathbb{N}$) si et seulement si la machine i termine au temps t sur l'entrée x avec y en sortie (cette formule existe car on a vu que ce prédicat est récursif). De même, il y a une formule $\varphi[i,s,b]$ Σ_1 qui est vraie si et seulement si la machine i a s états et b bandes. La formule
$$\exists i \exists t \exists s \exists b \exists x\, \varphi[i,s,b] \wedge C^1[i,t,x,N] \wedge 2^{n-s-b} > x$$
   est Σ_1 et représente $C(N) < n$.

2. Si $\mathbb{N} \models C(\underline{N}) < \underline{n}$, comme cette formule est Σ_1 et que T contient $\mathcal{P}_0$, on a $T \vdash C(\underline{N}) < \underline{n}$.

3. Supposons, au contraire que pour tout L, il existe N tel que $T \vdash C(N) \geqslant L$. On considére alors la fonction suivante $f(L) = \pi_1^2(\mu y\; \mathfrak{Dem}_T(\pi_2^2(y), \#(C(\underline{\pi_1^2(y)}) \geqslant \underline{L})))$. Cette fonction est récursive totale. Pour tout L, on a $C(f(L)) \geqslant L$ par définition de f, de plus, par définition de C, on a $C(f(L)) \leqslant \log_2(L) + M$ où M est la somme du nombre d'états et de bandes d'une machine de Turing décidant $\mathfrak{Dem}_T$. On a donc pour tout L, $L \leqslant \log_2(L) + M$, ce qui est absurde.

4. On a déjà vu que la fonction C tend vers l'infini (car il y a un nombre fini de machines de Turing avec moins de N états et bandes). Pour tout L il existe donc bien N tel que $\mathbb{N} \models C(N) \geqslant L$, mais T ne démontre pas cela. On a donc démontré qu'il y a des énoncés vrais dans $\mathbb{N}$ qui ne sont pas démontrables dans T (c'est un résultat un peu plus faible que le théorème d'incomplétude démontré dans le cours car on a juste démontré que si $\mathbb{N} \models T$, $\mathcal{P}_0 \subseteq T$ et T récursive alors T est incomplète).

Exercice 5 (Second théorème d'incomplétude, d'après un article récent de Kritchman et Raz.) **:**

1. C'est ce qu'on a vu dans la preuve de la question 2 de l'exercice 2 : L'énoncé $\varphi(x,L) =$« $C(x) \leqslant L$ » est Σ_1. Si, pour certaines valeurs de x et L, il est vrai dans les entiers standards $\mathbb{N}$, alors il est vrai dans tout modèle de Péano. Il est alors en particulier conséquence de T.

2. Le nombre de machines à k et j bandes est borné par $(3k2^j)^{k2^j}$ et donc on peut prendre $D(L) = (3L2^L)^{L2^L}2^L$.

3. Fixons L un entier tel que $\mathcal{P}$ prouve que si T est consistante, alors elle ne prouve aucun énoncé de la forme $C(x) > L$. Un tel L existe par l'exercice 2.

   Regardons ce qui se passe pour $m = 1$. Comme nous le permet l'indication, on sait que T prouve l'énoncé $\exists x \leqslant D(L)\, C(x) > L$. Supposons qu'il existe un unique $x_0 \leqslant D(L)$ qui ait une complexité $> L$. Alors pour tout $x \neq x_0$, $x \leqslant D(L)$, on a $C(x) \leqslant L$ donc par la question 1, $T \vdash C(x) \leqslant L$. En combinant les deux énoncés, on voit que T prouve $C(x_0) > L$. Ceci est absurde, donc $m = 1$ est impossible (et on n'a pas encore utilisé le fait que T prouve $\mathrm{Coh}(T)$.)

   A nouveau en utilisant l'indication, le raisonnement précédent peut se faire entièrement dans T. Plus précisément, par hypothèse, T prouve :

   a) si T est consistante, alors T ne peut prouver d'énoncé de la forme $C(x) > L$

   b) si $m = 1$, alors T prouve un énoncé de la forme $C(x) > L$.

   Ainsi $T \vdash \mathrm{Coh}(T) \to m \neq 1$.

   Supposons maintenant $m = 2$, il existe donc exactement deux entiers $x_0, x_1 \leqslant D(L)$ de complexité $\leqslant L$. Par la question 1, pour tout $x \leqslant D(L)$, $x \notin \{x_0, x_1\}$, T prouve $C(x) \leqslant L$. Ainsi T prouve $m \leqslant 2$. Par ce qui précède, T prouve
   $$\mathrm{Coh}(T) \to m = 2.$$

   Et comme dans le cas $m = 1$, on en déduit que, si T prouve $\mathrm{Coh}(T)$, alors T prouve $C(x_0) > L \wedge C(x_1) > L$, ce qui est absurde.

   Tout ce raisonnement peut se faire dans T, et donc on obtient que T prouve l'énoncé
   $$(T \vdash \mathrm{Coh}(T)) \to m > 2.$$

   Donc si T prouve $\mathrm{Coh}(T)$ alors, T prouve « $T \vdash \mathrm{Coh}(T)$ » et par suite T prouve $m > 2$.

   On continue ainsi par récurrence pour montrer que, si T prouve $\mathrm{Coh}(T)$, alors T prouve $m > k$ pour toute valeur de k. En particulier cela est vrai pour $k = D(L)$ ce qui est absurde. Donc T ne prouve par $\mathrm{Coh}(T)$.

Exercice 6 (Qui sont ces charmants messieurs ?) **:**
Ce sont (de gauche à droite) : Turing, Church et Peano.