Silvain Rideau
Bureau T5
silvain.rideau@ens.fr
www.eleves.ens.fr/home/srideau

TD de Logique 11

12 et 15 décembre 2014

Les exercices qui ne sont pas abordés en cours, seront (certainement) corrigés sur ma page personelle (voir ci-dessus).

Exercice 1 (Décidabilité des théories) **:**

1. Montrer que pour tout p premier ou nul ACF_p est décidable et qu'ACF elle même est décidable.

Soit L un langage fini et T une L-théorie consistante et *décidable*. Dans cet exercice, on considèrera que les théories sont closes par conséquence (i.e. si $T \vdash \varphi$ alors $\varphi \in T$).
On pose $C(T) := \{T' \supseteq T : T' \text{ est une } L\text{-théorie complète}\}$ et $C_d(T) := \{T' \in C(T) : T' \text{ est décidable}\}$.
Montrer les propriétés suivantes :

2. Si $C(T)$ est fini, alors toute complétion de T est décidable, c'est-à-dire $C_d(T) = C(T)$.
3. $C_d(T) \neq \varnothing$ (T admet une complétion décidable.)
4. $|C_d(T)| = \min(|C(T)|, \aleph_0)$.
5. Pour tout cardinal κ avec $1 \leqslant \kappa \leqslant \aleph_0$, il existe un langage L fini et une L-théorie T_κ consistante et décidable telle que $|C_d(T_\kappa)| = \kappa$.

Exercice 2 (Complétions de l'arithmétique) **:**

1. On note $\mathcal{N} = \langle \mathbb{N}, 0, 1, S, +, \times, < \rangle$. Soit $\mathcal{N} \preccurlyeq \mathcal{M}$, on dit que $X \subseteq \mathbb{N}$ est extérieurement définissable dans $\mathcal{M}$ s'il existe une formule $\varphi[x]$ à paramètres dans M telle que $\{n \in \mathbb{N} : \mathcal{M} \vDash \varphi[n]\} = X$. Montrer que toute partie de $\mathbb{N}$ est extérieurement définissable dans un modèle dénombrable.
2. Supposons $\mathcal{M}$ dénombrable, montrer que $\{X \subset \mathbb{N} : X \text{ est extérieurement définissable dans } \mathcal{M}\}$ est dénombrable. En déduire que $\mathcal{N}$ a $2^{\aleph_0}$ extensions élémentaires dénombrales non isomorphes au dessus de $\mathcal{N}$.
3. Soit $T \supseteq \mathcal{P}$ consistante telle que $T \setminus \mathcal{P}$ est finie, montrer que T ne peut être complète. En déduire qu'il existe $2^{\aleph_0}$ complétions de $\mathcal{P}$ (i.e. théories qui contiennent $\mathcal{P}$, sont complètes et closes par conséquence).

Exercice 3 (Fonctions prouvablement totales dans $\mathcal{P}$) **:**
Soit $f \in \mathcal{F}^p$ Σ_1-représentable par $F[\overline{x}, y]$. On dit que f est prouvablement totale dans $\mathcal{P}$ si $\mathcal{P} \vDash \forall \overline{x} \exists y\, F[\overline{x}, y]$.

1. Montrer qu'il existe une fonction récursive (partielle) $h \in \mathcal{F}^2$ telle que
   - si $a = \#F[x_0, x_1]$ où $F[x_0, x_1]$ est Σ_1 et qu'il existe $m \in \mathbb{N}$ tel que $\mathcal{P} \vDash F[\underline{n}, \underline{m}]$, alors $\mathcal{P} \vDash F[\underline{n}, \underline{h(a, n)}]$,
   - si $a = \#F[x_0, x_1]$ où $F[x_0, x_1]$ est Σ_1 et qu'il n'existe pas de $m \in \mathbb{N}$ tel que $\mathcal{P} \vDash F[\underline{n}, \underline{m}]$, alors $h(a, n)$ n'est pas défini,
   - sinon $h(a, n) = 0$.
2. On définit $g \in \mathcal{F}^3$ par :
   - si $a = \#F[x_0, x_1]$ où $F[x_0, x_1]$ est Σ_1 et si b est le code d'une preuve de $\forall x_0 \exists x_1\, F[x_0, x_1]$ dans $\mathcal{P}$ alors $g(a, b, n) = h(a, n)$,
   - sinon $g(a, b, n) = 0$.

   Montrer que g est récursive totale.
3. Montrer qu'il existe des fonctions récursives totales qui ne soient pas prouvablement totales dans $\mathcal{P}$.

Exercice 4 (Preuve de Chaitin du 1er théorème d'incomplétude) **:**
Étant donnée une machine à registres $\mathcal{M}$ et une entrée n, on définit la complexité de $(\mathcal{M}, n)$ comme étant le nombre de lignes de programme de $\mathcal{M}$ plus le nombre de registres utilisés plus $\log_2(n)$. La complexité d'un entier N est la complexité minimale d'un couple $(\mathcal{M}, n)$ tel que la machine $\mathcal{M}$ termine sur l'entrée n et renvoie N en sortie. On note $C(N)$ la complexité de N.
Soit T une théorie récursive consistante contenant $\mathcal{P}$.

1. Justifier que, pour $n, N \in \mathbb{N}$, l'énoncé «$C(N) < n$» est représentable par une formule Σ_1.
2. Montrer que si T prouve $C(N) \geqslant n$, alors cet énoncé est vrai dans $\mathbb{N}$.
3. Montrer qu'il existe un entier L tel qu'aucun énoncé de la forme « $C(N) \geqslant L$ » ne soit prouvable dans T.

   [Indication : Raisonner par l'absurde et construire une machine qui prenant L en entrée renvoie un N de complexité L.]
4. Conclure.

Exercice 5 (Second théorème d'incomplétude, d'après un article récent de Kritchman et Raz.) **:**
On étend les idées de la preuve précédente pour prouver aussi le second théorème d'incomplétude.
On reprend les notations et les hypothèses de l'exercice précédent.

1. Soit x un entier de complexité inférieure à L. Montrer que T prouve $C(x) \leqslant L$.
2. Soit L un entier. Déterminer un majorant $D(L)$ du nombre d'entiers x de complexité $\leqslant L$.
3. Supposons que T démontre $\mathrm{Coh}(T)$. Montrer par récurrence sur m que s'il existe exactement m valeurs de x entre 0 et $D(L)$ qui ont une complexité $> L$, alors T prouve $C(x) > L$ pour un certain x.

   (Commencer par étudier le cas $m = 1$. On admettra que les raisonnements faits sur les théories en utilisant la théorie des ensembles peuvent se démontrer entièrement dans T.)
4. Conclure.

Exercice 6 (Qui sont ces charmants messieurs ?) **:**