Silvain Rideau
Bureau T5

silvain.rideau@ens.fr
www.eleves.ens.fr/home/srideau

TD de Logique 12

20 décembre 2013 et 6 janvier 2014

Les exercices qui ne sont pas abordés en cours, seront (certainement) corrigés sur ma page personelle (voir ci-dessus).

Exercice 1 (ZF sans infini) **:**
Soit P l'ensemble des parties finies de $\mathbb{N}$, $\varphi : \mathbb{N} \to P$ une bijection. On note $x \epsilon_\varphi y$ si et seulement si $x \in \varphi(y)$. On note $\mathcal{M}_\varphi = \langle \mathbb{N}, \epsilon_\varphi \rangle$.

1. Montrer que $\mathcal{M}_\varphi$ est un modèle de ZF sans axiome de l'infini, mais qu'il vérifie la négation de l'axiome de l'infini.
2. Montrer que si, pour tout $x, y \in \mathbb{N}$, $x \in \varphi(y)$ implique $x < y$, alors $\mathcal{M}_\varphi$ vérifie l'axiome de fondation.
3. Montrer que l'application $\zeta : P \to \mathbb{N}$ qui a A associe $\sum_{a \in A} 2^a$ est bijective. Montrer que $\mathcal{M}_{\zeta^{-1}}$ est un modèle de ZF + AF sans axiome de l'infini.
4. Trouver une bijection $\xi : \mathbb{N} \to P$ telle que $\mathcal{M}_\xi$ ne satisfasse pas l'axiome de fondation.

Exercice 2 (Clôture transitive et fondation) **:**
Un ensemble x est dit transitif s'il vérifie que $\forall y\, (y \in x \to y \subseteq x)$.

1. Soit x un ensemble transitif, montrer que si $y \subseteq x$, $\bigcup y \subseteq x$.
2. On définit par récurrence $\pi_0(x) = x$ et $\pi_{n+1}(x) = \bigcup \pi_n(x)$. Justifier qu'il existe un ensemble y dont les éléments sont exactement les $\pi_n(x)$ pour $n \in \omega$. Montrer que $\mathrm{ct}(x) := \bigcup y$ est transitif et que c'est le plus petit ensemble transitif contenant x (pour l'inclusion).
3. Montrer que si pour tout $y \in x$, $(\mathrm{ct}(y), \in)$ est bien-fondé, alors $(\mathrm{ct}(x), \in)$ est bien fondé.
4. Montrer que l'axiome de fondation est équivalent au fait que pour tout x, $(\mathrm{ct}(x), \in)$ est bien fondé.

Exercice 3 (Ensembles héréditairement transitifs) **:**
Un ensemble x est dit héréditairement transitif si tout élément de $x \cup \{x\}$ est transitif.

1. Montrer que tout ordinal est héréditairement transitif.
2. Montrer que tout élément d'un ensemble héréditairement transitif est héréditairement transitif.
3. Montre que l'axiome de fondation implique que tout ensemble héréditairement transitif est un ordinal.

Exercice 4 (Relations bien fondées) **:**
Soit E une relation binaire sur un ensemble X. Pour $x \in X$ l'ensemble des E-prédécesseurs de x est donné par $E[x] := \{y \in X : (y, x) \in E\}$.
On dit que (X, E) est bien fondée si tout sous-ensemble non-vide Y de X contient un élément E-minimal y_0 ($y_0 \in Y$ et $E[y_0] \cap Y = \varnothing$).

1. Démontrer qu'il existe une unique classe fonctionnelle $H : \mathrm{Ord} \to \mathcal{P}(X)$ telle que :

$$\begin{array}{rcl} H(0) & = & \varnothing \\ H(\alpha+1) & = & \{x \in X : E[x] \subseteq H(\alpha)\} \\ H(\lambda) & = & \bigcup_{\alpha<\lambda} H(\alpha), \text{ si } \lambda \text{ est limite.} \end{array}$$

2. Montrer que pour tout $\alpha, \beta \in \mathrm{Ord}$ avec $\alpha \leqslant \beta$ on a $H(\alpha) \subseteq H(\beta)$.

3. Démontrer qu'il existe un ordinal α_0 tel que pour tout $\beta \geqslant \alpha_0$, $H(\beta) = H(\alpha)$.

4. Soit $Y = H(\alpha_0)$. On définit, pour $y \in Y$, le rang de y comme
$$\mathrm{Rg}(y) := \min\{\alpha \in \mathrm{Ord} : y \in H(\alpha+1)\}.$$
Pour $x \notin Y$ on pose $\mathrm{Rg}(x) = \infty$.
Montrer que pour $x \in Y$ et $y \in E[x]$, on a $\mathrm{Rg}(y) < \mathrm{Rg}(x)$ (en particulier $y \in Y$).

5. Montrer que pour tout $x \in Y$, $\mathrm{Rg}(x) = \sup\{\mathrm{Rg}(y) + 1 : y \in E[x]\}$.

6. Montrer que (X, E) est bien fondé si et seulement si $Y = X$.

Exercice 5 (Modèles internes) **:**
On reprend les définitions de l'exercice 4.

1. Supposons que (X, E) est bien fondée et extensionnelle (c'est-à-dire que pour tout $x, y \in X$, $x \neq y$, il existe $z \in X$ tel que $(zEx) \not\Leftrightarrow (zEy)$). Montrer qu'il existe un unique ensemble transitif $\widetilde{X}$ et une bijection $f : X \to \widetilde{X}$ qui soit un isomorphisme entre les structures (X, E) et $(\widetilde{X}, \in)$.

2. Montrer que (dans ZFC) les propositions suivantes sont équivalentes :
   - Il existe un modèle (M, E) de ZFC pour lequel E est bien fondé au sens précédent,
   - Il existe un modèle (M, E) de ZFC dont l'univers est un ensemble transitif M pour lequel E est la restriction à M de l'appartenance $\in$ au sens de l'univers ambiant.

3. Soit (M, E) un modèle de ZFC $+\neg\,\mathrm{Coh}(\mathrm{ZFC})$, montrer que E n'est pas bien fondé. (Indication : montrer que M contient un entier non-standard.)

4. On suppose que $\mathrm{ZFC} + \mathrm{Coh}(\mathrm{ZFC})$ est consistant. Justifier que
$$\mathrm{ZFC} + \mathrm{Coh}(\mathrm{ZFC}) + \neg\,\mathrm{Coh}(\mathrm{ZFC} + \mathrm{Coh}(\mathrm{ZFC}))$$
est consistant. En déduire que les deux propositions de la question 2 sont strictement plus fortes que $\mathrm{Coh}(\mathrm{ZFC})$.

Exercice 6 (Lemme de König) **:**
Un *graphe* $\mathcal{G}$ est la donnée d'un ensemble S (les *sommets*) et d'un ensemble A (les *arêtes*) de paires d'éléments de S (ne contenant pas de singleton). Un graphe est dit *fini* si S est fini et *infini* sinon.
Un *chemin* dans un graphe $\mathcal{G}$ est une suite $(s_i)_{i\in I}$ de sommets (avec soit $I = \{0, \ldots, n\}$ pour $n \in \mathbb{N}$ et on parle de chemin *fini* de longueur n, soit $I = \mathbb{N}$ et on parle de chemin *infini*) telle que $\{s_i, s_{i+1}\} \in A$ (pour tout i tel que $i + 1 \in I$). Un chemin est *simple* s'il ne contient pas deux fois le même sommet (*i.e.* $s_i = s_j \Rightarrow i = j$).
Un graphe est *connexe* si, quels que soient les sommets s et t de $\mathcal{G}$, il existe un chemin contenant s et t.
Le *degré* d'un sommet s est le nombre de sommets t adjacents à s dans $\mathcal{G}$ (*i.e.* tels que $\{s, t\} \in A$). Un graphe est de *degré fini* si tous ses sommets sont de degré fini.

Montrer, à l'aide de l'axiome des choix dépendants, que tout graphe connexe infini de degré fini a un chemin simple infini. (On pourra commencer par traiter le cas d'un *arbre*, c'est-à-dire un graphe qui ne contient pas de cycle.)

Exercice 7 (Qui sont ces charmants messieurs ?) **:**