Silvain Rideau
Bureau T7
silvain.rideau@ens.fr
www.eleves.ens.fr/home/srideau

TD de Logique 14 (Modèles de Frænkel-Mostowski)

14 janvier 2013

Les exercices précédés d'une ✠ sont là pour vous aider à comprendre le cours et devront être fait avant le TD pour être corrigé au début du TD. Les exercices qui ne sont pas abordés en cours, seront (certainement) corrigés sur ma page personelle (voir ci-dessus).

Exercice 1 (Atomes) **:**
Soit $\mathcal{U} \models \mathrm{ZF}^-$.

1. Soit $F[x, y]$ une relation foncionnelle qui induit une bijection de l'univers, on note $x \in' y$ la formule $\exists z(x \in z \wedge F[y, z])$, i.e. $x \in F(y)$. Montrer que $(\mathcal{U}, \in') \models \mathrm{ZF}^-$.
2. Montrer que si $(\mathcal{U}, \in) \models \mathrm{AC}$ alors $(\mathcal{U}, \in')$ aussi.
3. Un atome est un ensemble a tel que $a = \{a\}$. Montrer qu'on peut choisir F tel que $(\mathcal{U}, \in')$ ait un atome.
4. En déduire que si ZF^- (resp. ZFC^-) est cohérente alors $\mathrm{ZF}^- + \neg\,\mathrm{AC}$ (resp. $\mathrm{ZFC}^- + \neg\,\mathrm{AC}$) aussi.
5. Montrer qu'on peut choisir F pour que, dans $(\mathcal{U}, \in')$ l'ensemble des atomes soit équipotent à ω.

Exercice 2 (Une hiérarchie avec atomes) **:**
Soit $\mathcal{U}$ un modèles de ZF ayant un ensemble $\mathcal{A}$ non vide d'atomes. On définit pas induction transfinie :

$$\begin{array}{rcl} W_0 & = & \mathcal{A}, \\ W_{\alpha+1} & = & \mathfrak{P}(W_\alpha), \\ W_\lambda & = & \bigcup_{\alpha<\lambda} W_\alpha \text{ si } \lambda \text{ est limite.} \end{array}$$

1. Soit W la classe définie par la formule $\exists\alpha\ (\mathrm{Ord}(\alpha) \wedge x \in W_\alpha)$. Montrer que $\mathcal{U}' = (W, \in\restriction_W) \models \mathrm{ZF}^- + \neg\,\mathrm{AF}$.
2. Montrer que W satisfait $\forall a\ (a \neq \varnothing \rightarrow \exists b \in a(b = \{b\} \vee a \cap b = \varnothing))$. En déduire qu'un élément de W est un atome (au sens de W) si et seulement si $a \in W_0$.
3. Montrer que $\mathcal{U}' \models \forall x W[x]$ (où W est construite dans $\mathcal{U}'$ à partir de $\mathcal{A}$ comme elle l'était dans $\mathcal{U}$).

Exercice 3 (Consistante relative de $\neg(\mathrm{AC})$) **:**
Soit $\mathcal{U} \models \mathrm{ZF}^-$ qui satisfait de plus que l'ensemble $\mathcal{A}$ des atomes de $\mathcal{U}$ est équipotent à ω, et si la hiérarchie W est définie comme précédemment à partir de $\mathcal{A}$, alors $\mathcal{U} \models \forall x\ W[x]$. En particulier on a que $\mathcal{U} \models \forall a\ (a \neq \varnothing \rightarrow \exists b \in a(b = \{b\} \vee a \cap b = \varnothing))$.

1. Soit σ une permutation de $\mathcal{A}$ et soit α un ordinal, montrer par induction que l'on peut étendre $\sigma = \sigma_0$ de manière unique en un isomorphisme σ_α de $(W_\alpha, \in\restriction_{W_\alpha}$. Montrer que, pour tout $\beta \leq \alpha$, $\sigma_\alpha \restriction_{W_\beta} = \sigma_\beta$. Montrer qu'il existe une unique classe fonctionnelle Σ qui induit un « automorphisme » de $\mathcal{U}$ et qui étend σ. On le notera également $\sigma : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{U}$.
2. Montrer que $\sigma(\alpha) = \alpha$ pour tout $\alpha \in \mathrm{Ord}$.
3. On dit que e est définissable en terme d'ordinaux et d'atomes (DOA) s'il existe une formule sans paramètres $E[\overline{x}, \overline{y}, z]$, des ordinaux $\overline{\alpha}$ et des atomes $\overline{a}$ tel que :
$$\mathcal{U} \models \forall z(E[\overline{\alpha}, \overline{a}, z] \leftrightarrow z = e).$$
Montrer que $\mathcal{A}$, tout $a \in \mathcal{A}$ et tout $\alpha \in \mathrm{Ord}$ est DOA.
4. Soit $c \subset \mathcal{A}^2$ un ordre total sur $\mathcal{A}$. Montrer que c n'est pas DOA.
5. On dit que e est héréditairement définissable en terme d'ordinaux et d'atomes (HDOA) s'il existe un ensemble transitif f tel que f ainsi que ainsi que tout élément de f soit DOA et $e \in f$.
En utilisant le codage des formules, on peut montrer que DOA et HDOA sont des classes (définies par des formules sans paramètres). De plus, on peut montrer que $\mathrm{HDOA} \models \mathrm{ZF}^-$.
Montrer que $W_1 \subseteq \mathrm{HDOA}$ et que tout ordinal est HDOA.
6. En déduire que $\mathrm{HDOA} \models \mathrm{ZF} + \neg\,\mathrm{AF} + \neg\,\mathrm{AC}$, i.e. que la consistance de ZF entraîne celle de $\mathrm{ZF} + \neg\,\mathrm{AF} + \neg\,\mathrm{AC}$.