Correction du partiel

28 Février 2020

Vous pouvez toujours admettre les question précédentes quand vous répondez à une question.

Problème 1 :

1. Soit K un corps. Montrer l'équivalence des énoncés suivants :
   a) K est pseudo-fini ;
   b) Il existe un ultrafiltre $\mathfrak{U}$ non principal sur les puissances de nombres premiers tel que $K \equiv \prod_{q\to\mathfrak{U}} \mathbb{F}_q$.
2. Soit K un corps de caractéristique $p > 0$. Montrer l'équivalence des énoncés suivants :
   a) K est pseudo-fini ;
   b) Il existe un ultrafiltre $\mathfrak{U}$ sur $\mathbb{Z}_{>0}$ tel que $K \equiv \prod_{n\to\mathfrak{U}} \mathbb{F}_{p^n}$.

Solution :

1.a⇒ b Pour tout $\mathbb{Z}$-énoncé ϕ, soit $[\phi] := \{q : \mathbb{F}_q \vDash \phi\}$. Si $[\phi] = \varnothing$, $T_\mathrm{f} \vDash \neg\phi$ et donc $K \vDash \neg\phi$. Comme l'ensemble des $[\phi]$ avec $K \vDash \phi$ est clos par intersection finie et ne contient pas $\varnothing$, on trouve $\mathfrak{U}$ un ultrafilter sur les puissances de premiers qui contient tous les $[\phi]$. Par Łoś, $\prod_{q\to\mathfrak{U}} \mathbb{F}_q \vDash \phi$ si et seulement $[\phi] \in \mathfrak{U}$, ce qui équivaut par définition à $K \vDash \phi$.

b⇒ a Par Łoś, $\prod_{q\to\mathfrak{U}} \mathbb{F}_q \vDash \phi \vDash T_\mathrm{f}$. De plus, comme l'ultrafiltre est non principal, $\{q : |\mathbb{F}_q| \leqslant N\} \in \mathfrak{U}$ et donc $K \equiv \prod_{q\to\mathfrak{U}} \mathbb{F}_q \vDash T_\mathrm{psf}$.

2.a⇒ b Soit $[\phi] := \{n \in \mathbb{Z}_{>0} : \mathbb{F}_{p^n} \vDash \phi\}$. Si $[\phi] = \varnothing$, $T_\mathrm{f} \vDash p \simeq 0 \to \phi$ et donc $K \vDash \phi$. On trouve donc un ultrafiltre $\mathfrak{U}$ qui contient $[\phi]$ quand $K \vDash \phi$ et on vérifie que $K \equiv \prod_{n\to\mathfrak{U}} \mathbb{F}_{p^n}$.

b⇒ a Comme au dessus $K \vDash T_\mathrm{psf}$. De plus $K \equiv \prod_{n\mathfrak{U}} \mathbb{F}_{p^n} \vDash p \simeq 0$.

Problème 2 :

Soit K un corps. Montrer l'équivalence des énoncés suivants :

1. $K \vDash \mathrm{PAC}$;
2. Pour toute variété V géométriquement intègre définie sur K, $V(K)$ est soit infini soit un singleton.
3. Pour toute variété $V \subseteq \mathcal{S}_x^{\mathrm{Zar}}(K)$ géométriquement intègre définie sur K, la K-clôture de Zariski de $V(K)$ dans $(K^\mathrm{a})^x$ est $V(K^\mathrm{a})$.

Solution :

1⇒ 3 Soit $W \subset V$ un K-fermé de Zariski, $(f_i)_{i<n}, (g_j)_{j<m} \in K[x]$ tels que $\mathcal{I}_K(V) = (f_i : i < n)$ et $\mathcal{I}_K(W) = (g_j : j < m)$ et $L := K(V)$. On a $L \vDash \exists x \bigwedge_i f_i(x) \simeq 0 \wedge \bigwedge_j g_j(x) \not\simeq 0$. Comme $K \leqslant L$ est régulière et $W \subset V$, $K \vDash \exists x \bigwedge_i f_i(x) \simeq 0 \wedge \bigwedge_j g_j(x) \not\simeq 0$ et donc $V(K) \smallsetminus V(K) \neq \varnothing$. Pour conclure, on remarque que $V(K) \subseteq V(K^\mathrm{a})$ qui est un K-fermé de Zariski et l'on vient de montrer que pour tout K-fermé de Zariski $W(K^\mathrm{a}) \subset V(K^\mathrm{a})$, comme $W \subset V$ par le Nullstellensatz, $V(K) \smallsetminus W(K^\mathrm{a}) = V(K) \smallsetminus W(K) \neq \varnothing$.

3⇒ 2 Si $V(K) = \{a_i : i < n\}$ est fini, $V(K^\mathrm{a}) = \overline{V(K)} = V(K)$. Il s'ensuit que $\mathcal{I}_{K^\mathrm{a}}(V) = (X - a_i : i < n)$ qui n'est premier que si $n = 1$ et donc $V(K) = \{a_0\}$.

2⇒ 1 Un ensemble infini et un singleton sont, en particulier, non vides.

Problème 3 :

Soit $F \leqslant K$ une extensions algébrique et L une F-algèbre. Supposons que tout $P \in F[x]$, $|x| = 1$, qui a une racine dans K, a une racine dans L.

1. On suppose tout d'abord $F \leqslant K$ finie. Soit $K \leqslant E \leqslant F^\mathrm{a}$ telle que $F \leqslant E$ est normale finie. Montrer que $K \leqslant \bigcup_{\sigma\in\mathrm{Aut}(E/F)} \sigma(E \cap L) \leqslant E$.

2. Soit F un corps infini V, $(V_i)_{i<m}$ des sous F-espaces vectoriels d'un F-espace vectoriel W tels que $V \leqslant \bigcup_{i<m} V_i$. Montrer qu'il existe $i < m$ tel que $V \leqslant V_i$.
   [Indication : on peut procéder par induction sur i.]
3. En déduire, toujours en supposant que $F \leqslant K$ est finie, qu'il existe un morphisme de F-algèbres $f : K \to L$.
4. Montrer que, même sans hypothèse de finitude, il existe un morphisme de F-algèbres $f : K \to L$.

Solution :

1. Soit $a \in K$ et $P \in F[x]$ son polynôme minimal. Par hypothèse, P a une racine $b \in L$. De plus, il existe $\sigma \in \mathcal{G}(E/F)$ tel que $\sigma(b) = a$ et donc $a \in \sigma(E \cap L)$.
2. Si $m = 1$, c'est évident. Supposons donc $m > 1$. Si $V \cap V_0 \subseteq \bigcup_{0<i<m} V_i$ on a $V \subseteq \bigcup_{0<i<m} V_i$ et on conclut par induction. Soit donc $a \in (V \cap V_0) \setminus (\bigcup_{0<i<m} V_i)$. Pour tout $b \in V$, $a + Kb \subseteq V \subseteq \bigcup_{0\leqslant i<m} V_i$. Puisque K est infini, par le principe des tiroirs, il existe $\lambda, \mu \in K$ et $0 \leqslant i < m$ tels que $a + \lambda b, a + \mu b \in V_i$ et donc $a \in V_i$. Par construction $i = 0$, et donc $b \in V_0$. On a donc bien $V \leqslant V_0$.
3. Si F est fini, il est parfait, $F \leqslant K$ est séparable et donc monogène et on conclut aisément (voir le cours). Sinon F est infini et comme on a vu à la question 1, $K \bigcup_{\sigma\in \mathrm{Aut}(E/F)} \sigma(E \cap L) \leqslant E$. Par la question 2, il existe $\sigma \in \mathrm{Aut}(E/F)$ tel que $K \leqslant \sigma(E \cap L)$. On a alors $\sigma^{-1}(K) \leqslant L$.
4. On procède par compacité comme dans le cours.