Partiel

28 Février 2020

Vous pouvez toujours admettre les question précédentes quand vous répondez à une question.

Problème 1 :

1. Soit K un corps. Montrer l'équivalence des énoncés suivants :
   a) K est pseudo-fini ;
   b) Il existe un ultrafiltre non principal $\mathfrak{U}$ sur les puissances de nombres premiers tel que $K \equiv \prod_{q \to \mathfrak{U}} \mathbb{F}_q$.
2. Soit K un corps de caractéristique $p > 0$. Montrer l'équivalence des énoncés suivants :
   a) K est pseudo-fini ;
   b) Il existe un ultrafiltre non principal $\mathfrak{U}$ sur $\mathbb{Z}_{>0}$ tel que $K \equiv \prod_{n \to \mathfrak{U}} \mathbb{F}_{p^n}$.

Problème 2 :

Soit K un corps. Montrer l'équivalence des énoncés suivants :

1. $K \vDash \mathrm{PAC}$;
2. Pour toute variété V géométriquement intègre définie sur K, $V(K)$ est soit infini soit un singleton.
3. Pour toute variété $V \subseteq \mathcal{S}_x^{\mathrm{Zar}}(K)$ géométriquement intègre définie sur K, la K-clôture de Zariski de $V(K)$ dans $(K^{\mathrm{a}})^x$ est $V(K^{\mathrm{a}})$.

Problème 3 :

Soit $F \leqslant K$ une extensions algébrique et L une F-algèbre. Supposons que tout $P \in F[x]$, $|x| = 1$, qui a une racine dans K, a une racine dans L.

1. On suppose tout d'abord $F \leqslant K$ finie. Soit $K \leqslant E \leqslant F^{\mathrm{a}}$ telle que $F \leqslant E$ est normale finie. Montrer que $K \leqslant \bigcup_{\sigma \in \mathrm{Aut}(E/F)} \sigma(E \cap L) \leqslant E$.
2. Soit F un corps infini. Soient V et $(V_i)_{i<m}$ des sous F-espaces vectoriels d'un F-espace vectoriel W tels que $V \subseteq \bigcup_{i<m} V_i$. Montrer qu'il existe $i < m$ tel que $V \leqslant V_i$.
   [Indication : on peut procéder par induction sur i.]
3. En déduire, toujours en supposant que $F \leqslant K$ est finie, qu'il existe un morphisme de F-algèbres $f : K \to L$.
4. Montrer que, même sans hypothèse de finitude, il existe un morphisme de F-algèbres $f : K \to L$.