Examen

Théorie des modèles des corps valués

5 avril 2022

Vous pouvez toujours admettre le résultat d'une question précédente.

Problème 1. Soit (M, v, ac) un corps valué d'équicharactéristique zéro avec composante angulaire (dans le language avec sortes $\mathbf{K}$, $\mathbf{k}$ et $\mathbf{\Gamma}$). Montrer que pour tout $A \leqslant M$,

1. $\mathbf{K}(\mathrm{acl}(A)) = \mathbf{K}(A)^{\mathrm{a}}$.
2. $\mathbf{k}(\mathrm{acl}(A)) \subseteq \mathrm{acl}(\mathbf{k}(A))$ et $\mathbf{\Gamma}(\mathrm{acl}(A)) \subseteq \mathrm{acl}(\mathbf{\Gamma}(A))$.

Problème 2. Soient (K, v) un corps valué hensélien d'équicharactéristique zéro, $A = A^{\mathrm{a}} \cap K \leqslant K$ et b une boule A-definissable.

1. Si b est une boule fermée, montrer que $b \cap A \neq \varnothing$.
2. Si $\mathbf{\Gamma}(\mathrm{acl}(A)) \subseteq vA$ et $\mathbf{k}(\mathrm{acl}(A)) \subseteq Av$, montrer qu'on a toujours $b \cap A \neq \varnothing$.

Problème 3. Soit (K, v) un corps valué. On dit qu'il est algébriquement maximal si toute extension algébrique immédiate de K est triviale. On dit qu'il est définissablement sphériquement complet si pour toute famille définissable $B \subseteq K \times X$ telle que, pour tout $x, y \in X$, B_x est une boule et $B_x \subseteq B_y$ ou $B_y \subseteq B_x$, $\bigcap_{x \in X} B_x \neq \varnothing$.

1. Montrer que si (K, v) est algébriquement maximal, il est hensélien.
2. Montrer que si (K, v) est définissablement sphériquement complet, il est hensélien.
3. Supposons (K, v) finitement ramifié et $K \leqslant L$ une extension immédiate. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{Z}_{>0}$, $R_n(K) = R_n(L)$.
4. En supposant toujours que (K, v) est finiment ramifié. Montrer que sont équivalents:
   - (K, v) est hensélien;
   - (K, v) est algébriquement maximal;
   - (K, v) est définissablement sphériquement complet.
5. (Plus difficile) En toute généralité, montrer que si (K, v) est définissablement sphériquement complet, il est algébriquement maximal.